BIBLIOTECA DE MATEMATICĂ A ELEVULUI SI PROFESORULUI

4

GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER

CULEGERE DE PROBLEME DE GEOMETRIE

PENTRU CLASELE V-VIII

EDITURA HYPERION

ISBN 973-9157-84-X

GHEORGHE - ADALBERT SCHNEIDER

CRISTIAN - ANDREI SCHNEIDER

CULEGERE DE PROBLEME DE GEOMETRIE PENTRU CLASELE V-VIII

Ediţie revizuită şi adăugită

EDITURA HYPERION

Coperta : LUCIAN IRIMESCU

Internet: http://editurahyperion.go.ro
Telefon: 0251 / 410589
Comenzi pentru cărţile editurii noastre se pot face la următoarea adresă de e-mail: editurahyperion@go.ro, sau prin poştă la adresa: Craiova, str. Calea Bucureşti, bl. 17D, ap. 25.

Copyright ©, Editura Hyperion

ISBN 973-9157-84-X

PREFAŢĂ

Prezenta lucrare a fost elaborată cu scopul de a veni în sprijinul elevilor din clasele V-VIII care doresc să aprofundeze geometria.

Lucrarea a fost alcătuită conform programei şcolare, conţine aproximativ 1000 de probleme, care acoperă întreaga materie, fiind foarte utilă pentru lucrul la clasă, pentru pregătirea suplimentară a elevilor, iar prin unele probleme ce solicită gândirea logică şi creativitatea, este utilă pentru pregătirea elevilor în vederea concursurilor de matematică.

Problemele sunt grupate pe capitole conform structurii manualelor, încercându-se o acoperire cât mai completă a capitolelor tratate, dând posibilitatea elevului ca prin repetiţie şi evaluare, să aprofundeze principalele tehnici legate de rezolvarea problemelor de geometrie.

În prima parte a lucrării sunt prezentate enunţurile problemelor, grupate în mai multe capitole de geometrie plană din care amintim: dreapta unghiul, perpendicularitate, paralelism, relaţii metrice, cercul, arii, inegalităţi, probleme recapitulative, şi mai multe capitole de geometrie în spaţiu din care amintim: relaţii între puncte, drepte şi plane, proiecţii ortogonale pe un plan, calcul de arii şi volume, probleme recapitulative, iar în finalul primei părţi sunt prezentate 10 teste grilă de evaluare.

În partea a doua a lucrării sunt prezentate rezolvări ale unora dintre probleme, indicaţii pentru alte probleme, precum şi răspunsurile la alte categorii de probleme.

Autorii

GEOMETRIE PLANĂ

1. DREAPTA

1. Se consideră trei puncte oarecare şi distincte A, B, C.
Să se afle câte drepte sunt determinate de aceste puncte.

2. Se consideră patru puncte oarecare şi distincte A, B, C, D.
Să se afle câte drepte sunt determinate de aceste puncte.

3. Fie $A_1, A_2, \cdots, A_n$ n puncte oarecare, distincte şi coliniare. Să se afle câte drepte sunt determinate de aceste puncte.

4. Fie $A_1, A_2, \cdots, A_n$ n puncte oarecare şi distincte astfel încât nu există printre ele trei puncte coliniare.
Să se afle câte drepte sunt determinate de aceste puncte.

5. a) Cum trebuie aşezate patru puncte, astfel încât să determine exact patru drepte?
b) Cum trebuie aşezate n puncte, astfel încât să determine exact n drepte?

6. Se consideră punctele A, B, C, D distincte, astfel încât dreptele AB, BC şi CD să coincidă.
Să se precizeze cum sunt punctele A, B, C, D.

7. Se consideră punctele A, B, C, D astfel încât dreptele AB şi CD să fie paralele.
Să se afle câte drepte sunt determinate de aceste puncte.

8. a) Dacă avem dreptele a, b, c care îndeplinesc proprietăţile $a = b$ şi $b = c$, ce se poate spune despre dreptele a şi c?
b) Dacă avem dreptele a, b, c cu proprietăţile $a \neq b$ şi $b \neq c$, rezultă oare că $a \neq c$?

15. Se consideră o dreaptă d și trei puncte $A, B, C \in d$ (B între A și C) astfel încât $AB = 5$ cm și $BC = 7$ cm.

a) Să se calculeze lungimea segmentului $[AC]$.

b) Să se calculeze $AC - BC$. Ce observați?

16. Pe o dreaptă d se consideră punctele A, B, C, D în această ordine astfel încât $AB = 20$ cm, $BC = 10$ cm, $CD = 20$ cm. Fie E mijlocul segmentului $[AB]$ și F mijlocul segmentului $[CD]$. Să se găsească toate segmentele congruente.

17. Pe dreapta d se consideră punctele A, B, C în această ordine. Dacă $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm, M este mijlocul segmentului $[AB]$, N mijlocul lui $[BC]$ și P mijlocul lui $[AC]$, calculați MN, MP și NP.

18. Fie punctele A, B, C coliniare în această ordine, astfel încât $AB = a$ cm și $BC = b$ cm. Fie M mijlocul segmentului $[AC]$.

a) Să se determine poziția punctului M în funcție de a și b.

b) Să se calculeze MB.

19. Fie A, B, C trei puncte coliniare, în această ordine. Fie M mijlocul lui $[AB]$, N mijlocul lui $[BC]$ și P mijlocul lui $[AC]$. Să se demonstreze relațiile:

a) $MN = \frac{AC}{2}$; b) $MP = \frac{BC}{2}$; c) $NP = \frac{AB}{2}$.

20. Fie punctele $A, B, C, D \in d$ în această ordine. Știind că $[AC] \equiv [BD]$, să se demonstreze că $[AB] \equiv [CD]$. Dar dacă $[AB] \equiv [CD]$, rezultă că $[AC] \equiv [BD]$?

21. Fie punctele $A, B, C, D \in d$ în această ordine. Fie M mijlocul lui $[BC]$ și N mijlocul lui $[AD]$.

Să se demonstreze că dacă $[AC] \equiv [BD]$, atunci $M = N$. Dar dacă $M = N$, rezultă că $[AC] \equiv [BD]$?

22. Pe segmentul $[AB]$ se aleg punctele C și D astfel încât $[AC] \equiv [BD]$. Să se demonstreze că $[CB] \equiv [AD]$. Dacă punc-

tele C şi D se aleg pe dreapta AB, dar în exteriorul segmentului $[AB]$, se mai păstrează concluzia?

23. Pe segmentul $[AB]$ se consideră punctele C şi D astfel încât C să fie mijlocul lui $[AD]$ şi D mijlocul lui $[CB]$.
Să se demonstreze că $[AC] \equiv [CD] \equiv [DB]$.

24. Pe o dreaptă d se consideră patru puncte A, B, C, D în această ordine astfel încât $AC = 2 \cdot AB$ şi $AD = 2 \cdot AC$.
Să se arate că:
a) $AB = BC$; b) $AD = 4 \cdot BC$; c) $BD - AB = 2 \cdot BC$.

25. Se consideră un segment $[AB]$, C mijlocul lui $[AB]$ şi D mijlocul lui $[CB]$. Să se arate că:
a) $AB = 4 \cdot CD$; b) $AC = 2 \cdot DB$; c) $AD = 3 \cdot DB$.

26. Fie punctele A, B, M şi N coliniare, astfel încât $M, N \in (AB)$. Dacă $AM - BM = AN - BN$, să se demonstreze că $M = N$.

27. Fie punctele A, B, C şi D coliniare în această ordine.
Să se demonstreze relaţia $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

28. Fie A, B, C trei puncte coliniare. Ştiind că $AB = a$ cm şi $BC = b$ cm, să se calculeze AC.

29. Fie O_1, O_2, O_3, O_4 patru puncte coliniare astfel încât $O_1O_2 = 3$ cm, $O_1O_4 = 2$ cm, $O_2O_3 = 6$ cm, $O_4O_3 = 1$ cm.
Să se precizeze ordinea în care se află punctele pe dreaptă.
Ce se întâmplă dacă $O_4O_3 = 7$ cm? Dar dacă $O_4O_3 = 8$ cm?

30. Fie A, B, O trei puncte coliniare, astfel încât $O \notin (AB)$. Considerăm un punct M pe segmentul $[AB]$ cu proprietatea că $2 \cdot OM = OA + OB$. Să se demonstreze că punctul M este mijlocul segmentului $[AB]$.
Dacă M este mijlocul lui $[AB]$ este valabilă egalitatea?

31. Fie A, B, C trei puncte coliniare şi A_1, A_2 simetricele lui A faţă de B şi respectiv C. Dacă P şi Q sunt mijloacele

segmentelor (BC) şi respectiv (A_1A_2), atunci P este şi mijlocul segmentului (AQ).

32. Punctele A, B, C, D sunt coliniare în această ordine. Determinaţi:

a) $[AC] \cap [BD]$ b) $(AB \cap (CD$ c) $[BA \cap [BC$

d) $(BA \cap (CD$ e) $[CA \cap [BD$.

33. Fie A, B, C trei puncte coliniare. Să se afle ordinea lor ştiind că:

a) $[BC]$ este segmentul sumă al segmentelor $[BA]$ şi $[AC]$.

b) $[AB]$ este segmentul diferenţă al segmentelor $[AC]$ şi $[BC]$.

34. În ce situaţie segmentul diferenţă a două segmente situate pe aceeaşi dreaptă este congruent cu segmentul care reprezintă intersecţia lor?

35. Stabiliţi numărul minim de puncte care determină şase drepte distincte.

36. Stabiliţi numărul minim de puncte care determină $\frac{n(n-1)}{2}$ drepte. În ce situaţie se întâmplă? Care este numărul maxim de drepte pe care le pot determina n puncte? În ce situaţie se întâmplă?

37. Se dau punctele distincte A, B şi numărul $k > 0$, $k \neq 1$. Atunci există un singur punct M situat pe segmentul (AB) şi un singur punct N pe prelungirea lui AB astfel încât $\frac{AM}{BM} = k$, $\frac{NA}{NB} = k$.

2. UNGHIUL

1. Se consideră două unghiuri adiacente $A\hat{O}B$ şi $B\hat{O}C$ astfel încât $m(A\hat{O}B) = 30^o$ şi $m(B\hat{O}C) = 70^o$. Dacă $[OM$ şi $[ON$ sunt bisectoarele celor două unghiuri, să se calculeze $m(M\hat{O}N)$.

2. Se consideră patru semidrepte distincte $[OA$, $[OB$, $[OC$, $[OD$ astfel încât $[OB$ este bisectoarea unghiului $A\hat{O}C$ şi $[OC$ este bisectoarea unghiului $B\hat{O}D$.
Să se demonstreze că $A\hat{O}B \equiv B\hat{O}C \equiv C\hat{O}D$.

3. Se consideră trei unghiuri adiacente $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$ astfel încât $m(A\hat{O}B) = 45^o$, $m(B\hat{O}C) = 60^o$, $m(C\hat{O}D) = 75^o$.
a) Dacă $[OM$, $[ON$ şi $[OP$ sunt bisectoarele celor trei unghiuri, să se calculeze $m(M\hat{O}N)$, $m(M\hat{O}P)$, $m(N\hat{O}P)$.
b) Să se demonstreze că semidreptele $[OA$ şi $[OD$ sunt una în prelungirea celeilalte.

4. Fie unghiurile $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$, congruente şi adiacente două câte două.
a) Să se calculeze măsura celor trei unghiuri.
b) Să se demonstreze că semidreapta $[OA'$ opusa semidreptei $[OA$, este bisectoarea unghiului $C\hat{O}B$.

5. a) Să se demonstreze că bisectoarea interioară a unui unghi este unică.
b) O semidreaptă poate să fie bisectoare pentru două unghiuri distincte? Daţi un exemplu.

6. Fie unghiul $A\hat{O}B$ şi $[OC$ o semidreaptă în interiorul unghiului $A\hat{O}B$. Ducem $[OM$ bisectoarea unghiului $A\hat{O}C$ şi $[ON$ bisectoarea unghiului $B\hat{O}C$. Ştiind că $A\hat{O}B$ şi $M\hat{O}N$ sunt complementare, să se calculeze $m(A\hat{O}B)$.

7. Fie $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$ trei unghiuri adiacente şi $A\hat{O}B \equiv C\hat{O}D$. Ducem $[OM$, $[ON$ şi $[OP$ bisectoarele celor trei unghiuri.

Să se demonstreze că:
a) $M\hat{O}N \equiv N\hat{O}P$
b) $[ON$ este bisectoarea unghiului $A\hat{O}D$.

8. Din punctul O se duc semidreptele $[OA$, $[OB$, $[OC$ şi $[OD$ în această ordine, astfel încât $m(A\hat{O}B) = m(C\hat{O}D)$.
Să se afle unghiul format de bisectoarele unghiurilor $A\hat{O}C$ şi $B\hat{O}D$.

9. Să se demonstreze că bisectoarele a două unghiuri adiacente suplementare formează un unghi de 90^o.

10. Să se demonstreze că bisectoarele a două unghiuri adiacente complementare formează un unghi de 45^o.

11. Fie $A\hat{O}B$ şi $B\hat{O}C$ două unghiuri adiacente şi $[OM$, $[ON$ bisectoarele lor. Să se calculeze $m(M\hat{O}N)$ în funcţie de $m(A\hat{O}B)$ şi $m(B\hat{O}C)$.

12. Din punctul O ducem semidreptele $[OA$, $[OB$, $[OC$ şi $[OD$ în această ordine, astfel încât $A\hat{O}C \equiv B\hat{O}D$. Să se demonstreze că unghiurile $B\hat{O}C$ şi $A\hat{O}D$ au aceeaşi bisectoare.
Reciproc, dacă unghiurile $B\hat{O}C$ şi $A\hat{O}D$ au aceeaşi bisectoare rezultă că $A\hat{O}C \equiv B\hat{O}D$?

13. Fie $A\hat{O}B$ şi $B\hat{O}C$ două unghiuri distincte neadiacente şi $[OM$, $[ON$ bisectoarele lor. Să se calculeze $m(M\hat{O}N)$ în funcţie de $m(A\hat{O}B)$ şi $m(B\hat{O}C)$.

14. Fie $A\hat{O}B$ şi $A\hat{O}C$ două unghiuri neadiacente. Cum trebuie să ducem o semidreaptă $[OM$ în interiorul unghiului $B\hat{O}C$ astfel încât $m(A\hat{O}M) = \frac{m(A\hat{O}C) + m(A\hat{O}B)}{2}$.

15. În interiorul unghiului $A\hat{O}B$ ducem o semidreaptă $[OC$ şi fie $[OX$, $[OY$ bisectoarele unghiurilor $A\hat{O}C$ şi $B\hat{O}C$. Dacă $[OZ$ şi $[OM$ sunt bisectoarele unghiurilor $X\hat{O}Y$ şi respectiv $A\hat{O}B$, să se arate că $C\hat{O}Z \equiv Z\hat{O}M$.

16. Să se demonstreze că dacă două unghiuri congruente $A\hat{O}B$, $A'\hat{O}B'$ au laturile $[OA$ și $[OA'$ în prelungire, iar $[OB$ și $[OB'$ sunt de o parte și de alta a dreptei AA', atunci cele două unghiuri sunt opuse la vârf.

17. Să se demonstreze că bisectoarele a două unghiuri opuse la vârf sunt în prelungire.

18. Fie $[OC$ bisectoarea unghiului $A\hat{O}B$ și $[OM$ o semidreaptă oarecare. Să se arate că unghiul $C\hat{O}M$ este semisuma sau semidiferența unghiurilor $A\hat{O}M$ și $B\hat{O}M$.

19. Se consideră un unghi obtuz $A\hat{O}B$. Notăm cu α măsura complementului suplementului lui $A\hat{O}B$.

Să se demonstreze că $m(A\hat{O}B) - \alpha = 90^o$.

20. Se consideră un unghi drept $X\hat{O}Y$, $[OX$ este bisectoarea unui unghi $A\hat{O}B$, iar $[OY$ bisectoarea unui unghi $C\hat{O}D$ ($[OA$ și $[OC$ se iau în interiorul unghiului $X\hat{O}Y$).

Să se arate că unghiurile $A\hat{O}C$ și $B\hat{O}D$ sunt suplementare ($m(B\hat{O}D) < 180^o$). Ce se întâmplă dacă $[OA$ și $[OC$ sunt identice?

21. Din punctul O ducem semidreptele $[OO_1, [OO_2, \cdots,$ $[OO_n$ în această ordine, care formează în jurul lui O n unghiuri. Știind că nici un unghi nu are măsura mai mare decât $\frac{360^o}{n}$, să se calculeze măsura fiecărui unghi în parte.

3. PERPENDICULARITATE

1. Fie unghiul $A\hat{O}B$, cu $m(A\hat{O}B) = 120^{o}$. Fie $[OM$ bisectoarea unghiului $A\hat{O}B$ şi $[ON, [OP$ bisectoarele unghiurilor $A\hat{O}M$, respectiv $B\hat{O}M$.

Să se demonstreze că $[OA \perp [OP$ şi $[OB \perp [ON$.

2. În interiorul unghiului $A\hat{O}B$ ducem semidreptele $[ON$ şi $[OM$ astfel încât $A\hat{O}N \equiv N\hat{O}M \equiv M\hat{O}B$. Ştiind că $[OA \perp [OM$ să se arate că $[ON \perp [OB$ şi să se calculeze $m(A\hat{O}B)$.

3. Fie $[OA'$, $[OB'$ perpendiculare pe $[OA$, $[OB$. Să se arate că unghiurile $A\hat{O}B$ şi $A'\hat{O}B'$ sunt congruente sau suplementare.

4. În figura 4 $[OA \perp [OB$ şi unghiurile $A\hat{O}C$ şi $B\hat{O}D$ sunt suplementare. Să se demonstreze că:

a) $[OC \perp [OD$;

b) $A\hat{O}D \equiv B\hat{O}C$.

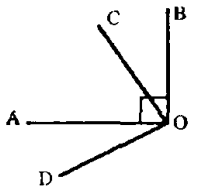

fig. 4

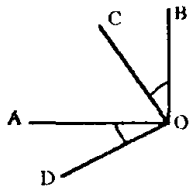

fig. 5

5. În figura 5 $A\hat{O}D \equiv B\hat{O}C$ şi unghiurile $A\hat{O}C$ şi $B\hat{O}D$ sunt suplementare. Să se demonstreze că $[OA \perp [OB$ şi $[OC \perp [OD$.

6. Fie A, B, C, D patru puncte coliniare în această ordine, astfel încât $[AC] \equiv [BD]$. Să se demonstreze că segmentele $[BC]$ şi $[AD]$ au aceeaşi mediatoare.

7. Fie A, B, C, D patru puncte coliniare în această ordine.

Să se demonstreze că dacă segmentele $[BC]$ şi $[AD]$ au aceeaşi mediatoare, atunci $[AC] \equiv [BD]$.

8. Fie o dreaptă d şi un punct $M \in d$. Să se determine toate punctele care se află la distanţa x faţă de dreapta d şi care se proiectează pe d în M.

9. Din punctul O se duc semidreptele $[OA, [OB, [OC$ şi $[OD$ în această ordine, astfel încât să formeze în jurul lui O patru unghiuri congruente. Să se demonstreze că $[OA$ şi $[OC$ sunt semidrepte opuse , la fel ca şi $[OB$ şi $[OD$ şi că $AC \perp \perp BD$.

10. Să se demonstreze că bisectoarele celor patru unghiuri formate de două drepte concurente, sunt drepte perpendiculare.

11. Din punctul O se duc semidreptele $[OO_1, [OO_2, \cdots, [OO_{4n}$ în această ordine, astfel încât să formeze în jurul lui O $4n$ unghiuri congruente. Să se determine câte perechi de drepte perpendiculare se formează.

4. TRIUNGHIUL

1. Fie un triunghi oarecare ABC, în care unghiurile $\hat{B}$ şi $\hat{C}$ sunt ascuţite. Să se găsească un punct M pe latura $[BC]$, astfel încât triunghiurile AMC şi AMB să nu fie obtuzunghice.

2. Fie un unghi $A\hat{O}B$ şi punctele M, N astfel încât $M \in [OA$, $N \in [OB$ şi $[OM] \equiv [ON]$. Considerăm un punct P în interiorul unghiului $A\hat{O}B$. Să se demonstreze că punctul P se află pe bisectoarea unghiului $A\hat{O}B$ dacă şi numai dacă $[PM] \equiv [PN]$.

3. Fie ABC şi $A'B'C'$ două triunghiuri congruente.
Să se demonstreze că medianele, bisectoarele şi înălţimile corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente.

4. Pe latura (OX a unghiului $X\hat{O}Y$ se iau segmentele $[OA]$ şi $[OA']$; pe (OY se iau segmentele $[OB] \equiv [OA]$ şi $[OB'] \equiv$ $\equiv [OA']$. Dreptele AB' şi BA' se intersectează în I. Să se arate că $[OI$ este bisectoarea unghiului $X\hat{O}Y$.

5. Fie un triunghi ABC şi A_1 un punct astfel încât $A_1 \notin [BC, A$ şi $\Delta ABC \equiv \Delta A_1CB$. Notăm cu M intersecţia dreptelor AA_1 şi BC. Să se demonstreze că:
a) $A_1\hat{A}B \equiv A\hat{A}_1C$; b) $[BM] \equiv [CM]$ şi $[AM] \equiv [A_1M]$.

6. Fie A', B' simetricele punctelor A, B în raport cu un punct O, adică O este mijlocul segmentelor $[AA']$ şi $[BB']$.
Să se demonstreze că $[AB] \equiv [A'B']$.

7. Să se demonstreze că dacă A', B', C' sunt simetricele vârfurilor triunghiului ABC faţă de punctul O, triunghiul $A'B'C'$ este congruent cu triunghiul ABC.

8. Să se demonstreze că într-un triunghi isoscel medianele, bisectoarele şi înălţimile corespunzătoare laturilor congruente, sunt congruente.

9. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic $AB > AC$. În exteriorul lui se construiesc triunghiurile dreptunghice isoscele BAD și CAE cu unghiurile drepte în A. Să se arate că $[CD] \equiv [BE]$.

10. Se consideră triunghiul isoscel $ABC (AB = AC)$ în care se duce înălțimea $[AD]$. Fie M un punct de pe înălțime, N intersecția dreptei CM cu AB și L intersecția dreptei BM cu AC.
Să se demonstreze că triunghiul MNL este isoscel.

11. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = AC$). Pe laturile $[AB]$ și $[AC]$ se aleg punctele P, respectiv Q astfel încât $[BP] \equiv [CQ]$. Notăm cu $\{M\} = BQ \cap CP$.
Să se demonstreze că:
a) $[BQ] \equiv [CP]$;
b) triunghiurile MBC, MPQ sunt isoscele.

12. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = AC$). Pe laturile $[AB]$ și $[AC]$ se aleg punctele P, respectiv Q astfel încât $[BQ] \equiv [CP]$. Rezultă de aici că $[BP] \equiv [CQ]$? Argumentați răspunsul.

13. Un triunghi este isoscel dacă și numai dacă o bisectoare a lui este și înălțime.

14. Un triunghi este isoscel dacă și numai dacă o înălțime a lui este și mediană.

15. Se să unghiul $X\hat{O}Y$ și un punct P. Să se ducă prin P o dreaptă care să intersecteze pe OX și OY în A și B, astfel încât $[OA] \equiv [OB]$.

16. Fie ABC un triunghi oarecare și $[AD]$ o mediană a lui. Dacă există un punct M pe dreapta AD ($M \neq D$) astfel încât $[MB] \equiv [MC]$, să se demonstreze că triunghiul ABC este isoscel.

17. În triunghiul ABC se prelungesc laturile $[BA]$ și $[CA]$ cu segmentele $[AM] \equiv [AC]$, respectiv $[AN] \equiv [AB]$.

Să se demonstreze că:
a) $[MN] \equiv [BC]$;
b) $\Delta BNM \equiv \Delta NBC$ şi $\Delta CMN \equiv \Delta MCB$.

18. Fie ABC un triunghi oarecare în care se duce mediana $[AM]$ şi se prelungeşte dincolo de M cu segmentul $[MD] \equiv [AM]$. Să se arate că $[AB] \equiv [DC]$ şi $[AC] \equiv [DB]$.

19. Fie ABC un triunghi isocel ($AB = AC$), B' şi C' mijloacele laturilor $[AC]$ şi respectiv $[AB]$. Se prelungeşte segmentul $[BB']$ dincolo de B' cu $[B'D] \equiv [BB']$ şi segmentul $[CC']$ dincolo de C' cu $[C'E] \equiv [CC']$.
Să se demonstreze că $[BE] \equiv [CD]$.

20. Fie ABC un triunghi oarecare. Înălţimea $[AD]$ se prelungeşte dincolo de D cu segmentul $[DE] \equiv [AD]$.
Să se demonstreze că:
a) triunghiurile BAE şi CAE sunt isoscele.
b) triunghiurile ABC şi EBC sunt congruente.

21. Fie ABC un triunghi oarecare, $[BB']$ şi $[CC']$ înălţimi. Se prelungeşte $[BB']$ dincolo de B' cu segmentul $[B'B''] \equiv [BB']$ şi $[CC']$ dincolo de C' cu segmentul $[C'C''] \equiv [CC']$. Să se demonstreze că:
a) $[BC''] \equiv [CB'']$;
b) dacă $[AB] \equiv [AC]$, atunci $[AB''] \equiv [AC'']$.

22. În triunghiul ABC, $m(\hat{A}) = m(\hat{B}) + m(\hat{C})$.
Să se arate că $[BC]$ este dublul medianei care pleacă din A.

23. Dacă pe laturile unui triunghi echilateral ABC, se iau în acelaşi sens segmentele $[AA'] \equiv [BB'] \equiv [CC']$, să se demonstreze că triunghiul $A'B'C'$ este echilateral.

24. Fie ABC un triunghi oarecare, astfel încât să avem $m(\hat{BCA}) = 30^o$. Înălţimea $[AD]$ se prelungeşte cu segmentul $[DA'] \equiv [AD]$. Să se demonstreze că triunghiul $AA'C$ este echilateral.

25. Pe mediatoarea laturii $[AB]$ a unui pătrat $ABCD$ se alege punctul P în interiorul pătratului, astfel încât $[BP] \equiv [CD]$.

Să se demonstreze că triunghiul PAB este echilateral.

26. Fie triunghiul ABC şi H punctul de intersecţie al înălţimilor. Ştiind că $[AH] \equiv [BH]$ şi că (AH este bisectoarea unghiului BAC, să se calculeze unghiurile triunghiului ABC.

27. Se consideră triunghiul isoscel ABC($[AB] \equiv [AC]$) şi $[AD$, $[AE$ trisectoarele unghiului $\hat{A}$. Să se demonstreze că triunghiul ADE este isoscel. Poate deveni triunghiul ADE echilateral?

28. Să se construiască un triunghi ABC ştiind că laturile $AB = 19$ mm, $BC = 46$ mm şi mediana $AM = 21$ mm.

29. Să se construiască un triunghi ABC, ştiind că $m(\hat{A}) = 30^o$, latura $AB = 30$ mm şi bisectoarea $AE = 35$ mm.

30. Să se construiască un triunghi ABC ştiind că laturile $AB = 35$ mm, $BC = 50$ mm şi înălţimea $AD = 29$ mm.

31. Să se construiască un triunghi ABC ştiind că laturile $AB = 20$ mm, $AC = 35$ mm şi înălţimea $AD = 18$ mm.

32. Să se construiască un triunghi ABC ştiind că latura $AB = 22$ mm, $m(\hat{A}) = 60^o$ mm şi înălţimea $AD = 18$ mm.

33. Să se construiască un triunghi ABC ştiind că latura $BC = 43$ mm, înălţimea $AD = 15$ mm şi mediana $AM = 20$ mm.

34. Să se construiască un triunghi ABC ştiind că $m(\hat{A}) = 60^o$, înălţimea $AD = 22$ mm şi bisectoarea $AE = 30$ mm.

35. Să se construiască un triunghi ABC ştiind că laturile $AB = 20$ mm, $AC = 33$ mm şi mediana $AM = 25$ mm.

5. PARALELISM

5.1 PARALELISM

1. Fie d şi g două drepte paralele tăiate de o secantă h în punctele A, respectiv B. Pe dreapta d alegem un punct $M \neq A$, iar pe dreapta g alegem un punct $N \neq B$, $N \notin [AB$, M. Bisectoarele unghiurilor $M\hat{A}B$ şi $N\hat{B}A$ intersectează pe g şi d în D şi E. Să se demonstreze că:
a) $AD \,||\, BE$; b) $[AD] \equiv [BE]$; c) $[AB] \equiv [AE] \equiv [DB]$.

2. Prin mijlocul M al unui segment $[AB]$, mărginit de două drepte paralele, se duce un alt segment $[CD]$, mărginit de aceleaşi drepte. Să se arate că M este mijlocul lui $[CD]$.

3. Într-un triunghi isoscel $ABC(AB = AC)$ se aleg punctele $M \in [AB]$ şi $N \in [AC]$. Să se demonstreze că $[AM] \equiv [AN]$ dacă şi numai dacă $MN \,||\, BC$.

4. Fie ABC un triunghi oarecare, $[BB']$ şi $[CC']$ bisectoare, iar $\{I\} = [BB'] \cap [CC']$. Prin I se duce dreapta $MN \,||\, BC$, unde $M \in [AB]$ şi $N \in [AC]$.
Să se demonstreze că $MB + NC = MN$.

5. Fie ABC un triunghi. Să se demonstreze că bisectoarea unui unghi exterior cu vârful în A este paralelă cu BC dacă şi numai dacă $[AB] \equiv [AC]$.

6. În triunghiul ABC se duce bisectoarea $[AD]$. Prin B se duce o paralelă la AD, care intersectează dreapta AC în M.
Să se demonstreze că triunghiul ABM este isoscel.

7. Pe ipotenuza $[BC]$ a unui triunghi dreptunghic ABC se ia un punct M. Fie N simetricul lui M faţă de AB. Dreapta NB intersectează paralela prin M la AB în punctul D.
Să se demonstreze că triunghiul MBD este isoscel.

8. Fie ABC un triunghi şi $[AD]$ bisectoarea unghiului $\hat{A}$. Din punctul D se duc dreptele DE şi DF paralele cu AB, respectiv cu AC, $E \in [AC]$ şi $F \in [AB]$. Să se arate că triunghiul DEF este isoscel. În ce caz triunghiul DEF devine echilateral?

9. În triunghiul ABC se duce bisectoarea $[AM]$. Din M se duc $[MT]$ bisectoarea unghiului $A\hat{M}B$ şi $[MS]$ bisectoarea unghiului $A\hat{M}C$. Dacă $MT \parallel AC$ şi $MS \parallel AB$, să se afle ce fel de triunghi este ABC.

10. În triunghiul ascuţitunghic ABC prelungim înălţimea $[AD]$ cu segmentul $[DD'] \equiv [AD]$. Să se demonstreze că $D'B \parallel AC$ dacă şi numai dacă $[AB] \equiv [AC]$.

11. Fie ABC un triunghi oarecare. Pe prelungirile laturilor $[BA]$ şi $[CA]$ se iau segmentele $[AM] \equiv [AB]$ şi $[AN] \equiv [AC]$. Să se demonstreze că $MN \parallel BC$.

12. Fie ABC un triunghi oarecare. Pe prelungirile laturilor $[BA]$ şi $[CA]$ se iau segmentele $[AM] \equiv [AC]$ şi $[AN] \equiv [AB]$. Să se demonstreze că $BN \parallel MC$.

13. Se prelungesc medianele $[BB']$, $[CC']$ ale triunghiului ABC cu $[B'B''] \equiv [BB']$ şi $[C'C''] \equiv [CC']$. Să se demonstreze că punctele A, B'', C'' sunt coliniare.

14. Fie triunghiul ABC şi A', B', C' mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$ şi respectiv $[AB]$. Segmentul $[A'B']$ se prelungeşte dincolo de B' cu segmentul $[B'B''] \equiv [A'B']$, iar segmentul $[A'C']$ se prelungeşte dincolo de C' cu segmentul $[C'C''] \equiv [A'C']$.
Să se demonstreze că punctele B'', A', C'' sunt coliniare.

15. Fie ABC un triunghi în care unghiurile $\hat{B}$ şi $\hat{C}$ sunt ascuţite. În semiplanul $[BC, A$ ducem dreptele $[BM$ şi $[CN$ astfel încât $BM \perp BC$ şi $CN \perp BC$. Demonstraţi că

$$m(\hat{A}) = m(M\hat{B}A) + m(A\hat{C}N).$$

Ce se întâmplă dacă $m(\hat{B}) > 90^o$? Dar dacă $m(\hat{C}) > 90^o$?

5.2 SUMA UNGHIURILOR UNUI TRIUNGHI. UNGHI EXTERIOR UNUI TRIUNGHI.

1. Să se demonstreze că nu este posibil ca suma măsurilor oricăror două unghiuri ale unui triunghi să fie mai mare decât 120^o.

2. Să se calculeze suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex.

3. Fie ABC un triunghi isoscel care are un unghi exterior de 120^o. Să se demonstreze că triunghiul ABC este echilateral.

4. Într-un triunghi ABC se cunosc $m(\hat{A}) = 60^o$, $m(\hat{C}) = 40^o$. Să se calculeze unghiul ascuţit pe care-l face bisectoarea unghiului $\hat{B}$ cu înălţimea ce pleacă din A.

5. Fie M un punct în interiorul unui triunghi echilateral astfel încât $m(M\hat{B}C) = m(M\hat{C}B) = 20^o$. Să se calculeze $m(A\hat{M}B)$.

6. Fie ABC un triunghi oarecare şi $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ bisectoarele unghiurilor triunghiului. Să se calculeze:

$$V = m(A\hat{A}'B) + m(B\hat{B}'C) + m(C\hat{C}'A).$$

7. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi $AA' \perp BC$, $BB' \perp AC$, $CC' \perp AB$, $\{H\} = AA' \cap BB' \cap CC'$. Să se arate că:

$$m(B\hat{H}C) = m(\hat{B}) + m(\hat{C}).$$

8. Fie ABC un triunghi oarecare şi $[BB']$, $[CC']$ bisectoarele unghiurilor $\hat{B}$ şi $\hat{C}$, iar I punctul lor de intersecţie.
Să se demonstreze că unghiul BIC este obtuz.

9. Fie ABC un triunghi oarecare $[BI$ şi $[CI$ bisectoarele unghiurilor $\hat{B}$ şi $\hat{C}$ şi $[BM$, $[CM$ bisectoarele unghiurilor $I\hat{B}C$ şi $I\hat{C}B$. Să se determine în funcţie de unghiurile $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ ale triunghiului ABC unghiurile triunghiurilor IBM şi ICM.

10. Fie ABC un triunghi oarecare. Pe semidreapta $[BC$ alegem punctul D astfel încât $[AB] \equiv [BD]$, iar pe semidreapta $[CB$ alegem punctul E astfel încât $[AC] \equiv [CE]$.

Să se determine $m(D\hat{A}E)$ în funcţie de $m(B\hat{A}C)$.

11. În interiorul pătratului $ABCD$ se consideră un punct M astfel încât triunghiul MAB să fie echilateral.

Să se calculeze unghiurile triunghiului DMC.

12. Fie ABC un triunghi oarecare cu $AB < AC$, $[AD]$ înălţimea şi $[AE]$ bisectoarea.

Să se demonstreze că $m(D\hat{A}E) = \dfrac{m(\hat{B}) - m(\hat{C})}{2}$.

13. În triunghiul ABC se consideră $[AD]$ bisectoarea unghiului $B\hat{A}C$. Pe dreapta AB se ia un punct E astfel încât A să fie situat între B şi E, iar $[AE] \equiv [AC]$.

Să se demonstreze că:

a) $m(B\hat{A}C) = 2 \cdot m(A\hat{E}C)$;

b) $m(A\hat{D}B) = m(B\hat{C}A) + \frac{1}{2} \cdot m(B\hat{A}C)$.

14. Fie ABC un triunghi oarecare, $[AD]$ înălţimea şi $[AE]$ bisectoarea unghiului $\hat{A}$. Dacă $[BD] \equiv [DE]$, să se arate că $m(\hat{A}) < 120^{\circ}$.

15. Pe laturile $[AB]$ şi $[AC]$ ale triunghiului ABC se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABD şi ACE. Fie $\{I\} = BE \cap CD$. Să se demonstreze că $[DC] \equiv [BE]$ şi să se calculeze $m(B\hat{I}C)$.

6. TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

1. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A. Se duce înălţimea $[AD]$, care se prelungeşte dincolo de D cu segmentul $[DA'] \equiv [DA]$. Să se demonstreze că $A'B \perp A'C$.

2. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A. Mediatoarea laturii $[BC]$ se intersectează cu bisectoarea unghiului $A\hat{B}C$ în $N \in [AC]$. Dacă M este mijlocul laturii $[BC]$, să se demonstreze că triunghiul ABM este echilateral.

3. Să se demonstreze că un triunghi ABC este dreptunghic în A dacă şi numai dacă mediana $[AM]$ este jumătate din latura $[BC]$.

4. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A şi $[AD]$ înălţime. Să se demonstreze că bisectoarea unghiului $D\hat{A}C$ este perpendiculară pe bisectoarea unghiului $\hat{B}$.

5. Pe laturile unui unghi $X\hat{O}Y$ ($m(X\hat{O}Y) = \alpha < 60^o$) se consideră punctul A pe axa $(OX$ şi punctul B pe axa $(OY$. Se notează cu A' simetricul lui A faţă de $(OY$ şi cu B' simetricul lui B faţă de $(OX$. Să se calculeze $m(A'\hat{O}B')$ în funcţie de α.

6. Se dau trei puncte A, B, C. Să se ducă prin C o dreaptă egal depărtată de A şi B.

7. Fie ABC un triunghi oarecare. Ştiind că B şi C sunt egal depărtate de bisectoarea unghiului $\hat{A}$, să se demonstreze că triunghiul ABC este isoscel.

8. Fie ABC un triunghi oarecare şi $[AD]$ bisectoarea unghiului $\hat{A}$. Perpendiculara din B pe AD intersectează pe AC în B'. Fie E simetricul lui B' faţă de A. Să se arate că $EB \perp BB'$.

9. În triunghiul ABC, fie D piciorul înălţimii din A şi E, F mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$. Să se demonstreze că

unghiurile $F\hat{D}E$ şi $B\hat{A}C$ sunt congruente.

10. Fie ABC un triunghi oarecare şi E, F, G mijloacele laturilor $[AB], [BC], [CA]$. Dacă D este piciorul perpendicularei dusă din A pe BC, să se demonstreze că $[DE] \equiv [FG]$.

11. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, $m(\hat{B}) > m(\hat{C})$. Notăm cu D mijlocul ipotenuzei $[BC]$. Perpendiculara în D pe BC intersectează cateta $[AC]$ în E. Să se demonstreze că $m(A\hat{D}E) = m(\hat{B}) - m(\hat{C})$.

12. Fie ABC un triunghi, $[BD]$ şi $[CE]$ înălţimi, iar O mijlocul segmentului $[BC]$. Să se demonstreze că triunghiul OED este isoscel şi să se calculeze unghiurile lui în funcţie de unghiurile triunghiului ABC. În ce caz triunghiul OED este echilateral?

13. Fie ABC un triunghi oarecare. Prin A ducem dreapta $d \parallel BC$ şi alegem un punct $P \in d$ astfel încât $[AP] \equiv [CD]$, unde D este piciorul înălţimii duse din A pe $[BC]$.
Demonstraţi că $[PD] \equiv [AC]$.

14. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic. Mediatoarele laturilor triunghiului se intersectează în O. Să se calculeze $m(B\hat{O}C)$ în funcţie de $m(\hat{A})$.

15. Să se demonstreze că bisectoarele a două unghiuri exterioare ale unui triunghi şi bisectoarea unghiului al treilea sunt concurente.

16. Fie ABC un triunghi oarecare şi D un punct pe segmentul $[BC]$, $DD' \perp AB$ şi $DD'' \perp AC$. Fie punctele E şi F astfel încât $[ED'] \equiv [DD']$ şi $[FD''] \equiv [DD'']$. Să se determine poziţia punctului D, astfel încât triunghiul DEF să fie isoscel cu baza EF.

17. Fie ABC un triunghi în care $m(\hat{A}) = \alpha < 90^o$ şi D un punct pe segmentul $[BC]$. Fie $DD' \perp AB$ şi $DD'' \perp AC$. Se

prelungeşte $[DD']$ dincolo de D' cu $[ED'] \equiv [DD']$ şi $[DD'']$ dincolo de D'' cu $[D''F] \equiv [DD'']$. Să se calculeze unghiurile triunghiului AEF în funcţie de α.

18. În triunghiul ABC dreptunghic în A avem $AB = \frac{BC}{2}$.

Să se demonstreze că $m(\hat{C}) = 30^o$.

19. Fie ABC un triunghi în care $m(\hat{C}) = 30^o$ şi $AB = \frac{BC}{2}$.

Să se demonstreze că $m(\hat{A}) = 90^o$.

20. Fie ABC un triunghi în care $m(\hat{A}) = 60^o$ şi $AC = 2 \cdot AB$. Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic în B.

21. Fie ABC un triunghi în care $m(\hat{B}) = 60^o$ şi $[AD]$ este bisectoarea unghiului $\hat{A}$.

Ştiind că $m(A\hat{D}B) = 75^o$ să se demonstreze că $BC = 2 \cdot AB$.

22. Fie triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90^o$), în care ducem înălţimea $[AD]$.

Ştiind că $m(\hat{C}) = 30^o$, să se demonstreze că $3 \cdot BD = DC$.

23. În triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90^o$), avem $m(\hat{C}) = 30^o$. Fie $[BE]$ bisectoarea unghiului $\hat{B}$.

Să se demonstreze că $BE = \frac{2}{3} \cdot AC$.

24. În triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90^o$), se duce $AD \perp BC$. Perpendiculara din D pe AC intersectează pe AC în E. Ştiind că $m(\hat{B}) = 60^o$, să se demonstreze că $8 \cdot DE = 3 \cdot BC$.

25. În triunghiul ABC se duce bisectoarea $[AA']$ a unghiului $\hat{A}$ care are 60^o. Din A' se duce perpendiculara $A'M$ pe AB ($M \in AB$). Din M se duce perpendiculara MN pe AA' ($N \in AA'$). Să se demonstreze că:

a) $A'M + 2 \cdot A'N = AA'$; b) $AA' + 2 \cdot A'N = 3 \cdot A'M$.

26. Se consideră triunghiul echilateral ABC şi un punct M arbitrar pe latură $[BC]$. Din M se duce perpendiculara MD pe AC ($D \in [AC]$), care întâlneşte prelungirea laturii $[AB]$ în E. Fie F mijlocul lui ME. Să se arate că $AB = 2 \cdot (CD + BF)$.

27. Se consideră triunghiul ABC ($m(\hat{A}) = 90^o$) dreptunghic isoscel şi o dreaptă d ce trece prin C şi intersectează pe AB în E (A se află între B şi E). Ducem $BD \perp CE$ şi fie $\{F\} = AC \cap BD$. Să se demonstreze că triunghiul AFE este isoscel.

28. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A. Pe dreptele AC şi AB se iau respectiv punctele E şi D astfel încât $[AE] \equiv$ $\equiv [AB]$, A între C şi E, $[AD] \equiv [AC]$, A nu este între B şi D.
Să se demonstreze că $EB \perp DC$.

29. În triunghiul ABC se prelungeşte înălţimea $[BD]$ dincolo de B cu segmentul $[BB'] \equiv [AC]$ şi înălţimea CE dincolo de C cu segmentul $[CC'] \equiv [AB]$. Să se demonstreze că triunghiul $AB'C'$ este dreptunghic isoscel.

30. Pe laturile $[AB]$ şi $[AC]$ ale unui triunghi ABC se construiesc în afară triunghiurile isoscele ADB($DA = DB$) şi ACE($EA = EC$). Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Dacă punctele D, H, C şi punctele E, H, B sunt respectiv coliniare, să se calculeze unghiurile triunghiului ABC.

31. În triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90^o$) avem $m(\hat{C}) = 20^o$. Alegem pe $M \in [AC]$ astfel încât $m(M\hat{B}C) =$ $= 40^o$. Să se demonstreze că M nu este mijlocul laturii $[AC]$.

32. Fie ABC un triunghi echilateral şi $AD \perp BC$. Se prelungeşte segmentul $[BC]$ dincolo de B cu segmentul $[BM] \equiv [BD]$. Fie N mijlocul segmentului $[AB]$. Dreapta MN taie pe AD în P. Să se demonstreze că $CP \perp AM$.

7. PATRULATERE

1. Dacă un patrulater are două unghiuri suplementare, atunci celelalte două unghiuri sunt tot suplementare. În plus, dacă cele două unghiuri suplementare sunt alăturate, atunci patrulaterul are două laturi opuse paralele.

2. Se consideră un pătrat $ABCD$ şi pe laturile $[AB]$ şi $[CD]$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABE în interiorul pătratului şi CDF în exterior.
Să se calculeze unghiurile patrulaterului $ADFE$.

3. Fie $ABCD$ un pătrat şi O intersecţia diagonalelor lui. Pe latura AB luăm punctul M astfel încât $[AM] \equiv [OD]$. Să se demonstreze că dreapta OM este paralelă cu bisectoarea unghiului $D\hat{B}C$.

4. Se consideră dreptunghiul $ABCD$. Pe laturile $[AB]$ şi $[BC]$ se construiesc în exteriorul dreptunghiului triunghiurile echilaterale ABE şi BCF. Fie H intersecţia dreptelor AE şi CF.
Să se calculeze $m(E\hat{M}F)$.

5. Fie $ABCD$ un dreptunghi. Bisectoarea unghiului $B\hat{D}A$ intersectează latura $[AB]$ în E. Pe dreapta AB alegem un punct F astfel încât $F\hat{D}E \equiv F\hat{E}D$. Să se demonstreze că $FD \perp DB$.

6. Fie ABC un triunghi oarecare. Printr-un punct M al laturii $[BC]$ se duc dreptele $MN \parallel AC$ şi $MP \parallel AB$ ($N \in [AB]$, $P \in [AC]$). Să se determine poziţia punctului M, astfel încât patrulaterul $ANMP$ să fie romb.

7. Pe laturile $[AB]$ şi $[BC]$ ale rombului $ABCD$ se construiesc în afara lui triunghiurile echilaterale ABE şi BCF.
Să se demonstreze că triunghiul DEF este echilateral.

8. Să se demonstreze că bisectoarele a două unghiuri alăturate ale unui paralelogram sunt perpendiculare.

9. Fie $ABCD$ un paralelogram. Să se demonstreze că bisectoarele unghiurilor $\hat{A}$ și $\hat{B}$ se intersectează pe segmentul $[CD]$ dacă și numai dacă $AB = 2 \cdot BC$.

10. Să se demonstreze că bisectoarele unghiurilor unui paralelogram formează un dreptunghi ale cărui diagonale sunt paralele cu laturile paralelogramului.

11. Se consideră un paralelogram $ABCD$. Fie M intersecția bisectoarelor unghiurilor $\hat{A}$, $\hat{D}$, iar N intersecția bisectoarelor unghiurilor $\hat{B}$, $\hat{C}$. Să se arate că $MBND$ este paralelogram.

12. În triunghiul isoscel $ABC(AB = AC)$ se duc medianele AM, BN, CP care se intersectează în punctul G. În punctul C se duce perpendiculara pe BC, care intersectează mediana BN în punctul D. Să se demonstreze că $AGCD$ este paralelogram.

13. Fie ABC un triunghi, $A' \in [BC]$ și I mijlocul segmentului $[AA']$. Dreptele BI, CI intersectează laturile opuse în M și N, iar dreptele paralele duse din A' la AC și AB intersectează pe $[BM]$ și $[CN]$ în P și Q.

Să se demonstreze că $MNPQ$ este un paralelogram.

14. Să se demonstreze că în triunghiul ABC, paralela dusă prin mijlocul C' al laturii $[AB]$, trece prin mijlocul B' al laturii $[AC]$.

15. Se consideră triunghiul ABC și se notează cu M și N mijloacele laturilor $[AB]$ respectiv $[AC]$. Pe prelungirea segmentului $[MN]$ se consideră punctul P astfel încât $[MN] \equiv [NP]$. Să se demonstreze că $m(\hat{ACB}) = m(\hat{NAP}) + m(\hat{NPA})$.

16. Dacă în triunghiul ABC avem $BC = 2 \cdot AC$, atunci mediana $[AA']$ este bisectoarea unghiului format de latura $[AB]$ și de mediana $[AA_1]$ a triunghiului $A'AC$.

17. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, $[AD]$ înălțimea

și $[AE]$ mediana. Știind că înălțimea din D a triunghiului ADC trece prin mijlocul medianei $[AE]$, să se demonstreze că $m(\hat{B}) = 2 \cdot m(\hat{C})$.

18. Pe prelungirile laturilor $[BC]$ și $[CA]$ ale triunghiului echilateral ABC luăm punctele D și E astfel încât $[CD] \equiv$ $\equiv [AE] \equiv [AB]$. Dreptele DE și AB se intersectează în F.

Să se arate că $AF = \frac{1}{3} \cdot AB$.

19. Fie triunghiul ABC, în care $[AD]$ este mediană. Luăm P mijlocul medianei $[AD]$ și $\{N\} = CP \cap AB$.

Să se demonstreze că $\frac{NB}{NA} = 2$.

20. Fie ABC un triunghi oarecare și $E \in [BC]$ astfel încât $EC = 2 \cdot BE$ și $[BB']$ mediană. Să se arate că $[AE]$ trece prin mijlocul segmentului $[BB']$.

21. Se consideră triunghiul isoscel $ABC(AB = AC)$, M mijlocul lui AC și D un punct pe semidreapta $(BM$ astfel încât $AB = AD$. Dacă E și F sunt mijloacele segmentelor AB și AD, să se demonstreze că $CE + CF = 2 \cdot EF$.

22. Fie triunghiul ABC și $[BB']$ bisectoare. Din A ducem perpendiculara AD pe BB', $D \in BB'$. Știind că B_1, C_1 sunt mijloacele laturilor $[AC]$, respectiv $[AB]$, să se demonstreze că:

a) $DC_1 \parallel BC$;

b) punctele D, C_1, B_1 sunt coliniare.

23. Să se demonstreze că picioarele perpendicularelor duse din vârful A al triunghiului ABC pe bisectoarele unghiurilor $\hat{B}$ și $\hat{C}$ sunt patru puncte coliniare.

24. Unghiurile opuse $\hat{A}$ și $\hat{C}$ ale patrulaterului $ABCD$ sunt drepte. Dreptele AD, CB și AB, CD se intersectează respectiv în E și F. Să se arate că dreptele BD și EF sunt perpendiculare.

25. Fie $ABCD$ un patrulater în care $AC \perp BC$ şi $DB \perp AD$. Ştiind că $\{O\} = AC \cap BD, \{E\} = AD \cap BC$, să se demonstreze că $EO \perp AB$.

26. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A şi G centrul de greutate al triunghiului. Să se demonstreze că $BC = 3 \cdot AG$.

27. Fie $ABCD$ un paralelogram, iar M şi N mijloacele laturilor $[AD]$ şi $[BC]$. Se consideră $\{E\} = BM \cap AC$ şi $\{F\} = DN \cap AC$. Să se demonstreze că $[AE] \equiv [EF] \equiv [FC]$.

28. Fie $ABCD$ un paralelogram, iar E şi F două puncte pe diagonala $[AC]$ astfel încât $[AE] \equiv [EF] \equiv [FC]$. Dacă $\{M\} = DE \cap AB$ şi $\{N\} = BF \cap CD$, să se arate că $MN \parallel AD$.

29. În triunghiul ABC luăm simetricele A_1, B_1, C_1 ale unui punct O_1 faţă de mijloacele A', B', C' ale laturilor.

Să se arate că:

a) dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente într-un punct O_2.

b) dacă G este centrul de greutate al triunghiului, atunci $GO_1 = 2 \cdot GO_2$.

30. Fie $ABCD$ un patrulater. Dacă M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor patrulaterului, atunci:

a) $MNPQ$ este paralelogram;

b) dacă $AC \perp BD$, atunci $MNPQ$ este dreptunghi;

c) dacă $[AC] \equiv [BD]$, atunci $MNPQ$ este romb;

d) dacă $AC \perp BD$ şi $[AC] \equiv [BD]$, atunci $MNPQ$ este pătrat.

31. Să se demonstreze că într-un patrulater, segmentele care unesc mijloacele laturilor opuse şi mijloacele diagonalelor se intersectează în părţi egale.

32. Fie paralelogramul $ABCD$ şi O punctul de intersecţie al diagonalelor lui. Pe diagonala $[BD]$ luăm punctele P şi Q astfel încât $[BP] \equiv [PO]$ şi $[DQ] \equiv [QO]$. Ştiind că M şi N sunt mijloa-

cele laturilor $[AB]$, respectiv $[CD]$, să se demonstreze că $MPNQ$ este paralelogram.

33. Se consideră un punct M în planul paralelogramului $ABCD$. Fie N simetricul lui M față de A, P simetricul lui N față de B și Q simetricul lui P față de C. Să se arate că dreapta MQ trece prin punctul D și că D este mijlocul segmentului $[MQ]$.

34. Fie B', C' mijloacele laturilor $[AC]$, $[AB]$ în triunghiul ABC. Luăm de la B' spre C segmentul $[B'D] \equiv [AC']$. Să se arate că perpendiculara coborâtă din D pe bisectoarea unghiului $\hat{A}$, trece prin mijlocul laturii $[BC]$.

35. Fie $ABCD$ un paralelogram și M, N, P, Q proiecțiile punctelor A, B, C, D pe diagonalele paralelogramului.
Să se demonstreze că $MNPQ$ este paralelogram.

36. Fie $ABCD$ un paralelogram. Mediatoarele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ taie dreptele CD, DA, AB, BC în punctele M, P, N, R. Să se demonstreze că $MPNR$ este paralelogram.

37. Fie $ABCD$ un romb și A_1, A_2, C_1, C_2 proiecțiile punctelor A și C pe dreptele DC, BC, AB respectiv AD. Să se demonstreze că dreptele A_1C_1, A_2C_2, AC și BD sunt concurente.

38. Fie $ABCD$ un paralelogram și O punctul de intersecție al diagonalelor lui. Să se demonstreze că proiecțiile punctului O pe laturile paralelogramului sunt vârfurile unui paralelogram. Ce se întâmplă când $ABCD$ este dreptunghi? Dar dacă $ABCD$ este romb?

39. Fie $ABCD$ un paralelogram. Pe laturile lui în exterior se construiesc triunghiurile echilaterale ABN, BCP, CDQ și DAM. Să se demonstreze că $MNPQ$ este paralelogram. Ce se întâmplă când $ABCD$ este dreptunghi? Dar dacă $ABCD$ este romb?

40. Pe laturile opuse $[AB]$, $[CD]$ ale unui paralelogram se construiesc în afară două triunghiuri echilaterale ABM şi CDP, iar pe laturile opuse $[BC]$, $[DA]$ se construiesc înăuntru triunghiurile echilaterale BCN, DAQ. Să se arate că $MNPQ$ este un paralelogram ale cărui laturi sunt congruente cu diagonalele paralelogramului $ABCD$.

41. Fie un trapez $ABCD\,(AB \parallel CD)$. Să se demonstreze că diagonala $[AC]$ este bisectoarea unghiului $\hat{A}$ dacă şi numai dacă $[AD] \equiv [CD]$.

42. Fie $ABCD$ un trapez în care diagonalele sunt bisectoare pentru unghiurile de la baza mare.

Să se demonstreze că $ABCD$ este trapez isoscel.

43. Fie trapezul isoscel $ABCD\,(AB \parallel CD)$ în care $[AD] \equiv [DC] \equiv [CB]$ şi $m(\hat{B}) = 60^o$. Să se demonstreze că $AB = 2 \cdot CD$.

44. Fie un trapez isoscel cu un unghi de măsură 60^o. Ştiind că lungimile bazelor sunt de a cm şi respectiv b cm $(a > b)$, să se calculeze perimetrul trapezului.

45. Să se demonstreze că punctul de intersecţie al diagonalelor unui trapez nu se află pe linia mijlocie a trapezului.

46. Să se demonstreze că paralela la baze dusă prin mijlocul uneia din laturile neparalele ale unui trapez intersectează a doua din laturile neparalele în mijlocul acesteia şi trece prin mijloacele diagonalelor.

47. În trapezul $ABCD\,(AB \parallel CD)$, avem $AB = a$ cm şi $CD = b$ cm $(a > b)$. Fie E şi F mijloacele diagonalelor $[AC]$ şi $[BD]$. Să se calculeze lungimea segmentului $[EF]$.

48. Se consideră trapezul oarecare $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB = 20$ cm, M şi N mijloacele diagonalelor AC şi BD şi $MN = 5$ cm. Să se determine lungimea segmentului $[CD]$.

49. Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu $AD \parallel BC$, $AA' \perp BC$ şi M, N mijloacele diagonalelor BD şi respectiv AC.
Să se demonstreze că $A'B = MN$.

50. Fie $ABCD$ un trapez cu bazele $[AB]$ şi $[CD]$. Bisectoarele unghiurilor $\hat{A}$ şi $\hat{D}$ se intersectează în E. Ştiind că M şi N sunt mijloacele laturilor $[AD]$ şi $[BC]$, să se demonstreze că:
a) $EM \parallel AB$;
b) punctele E, M, N sunt coliniare.

51. Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare. Să se demonstreze că linia mijlocie şi înălţimea sunt congruente.

52. Fie $ABCD$ un trapez oarecare ($AB \parallel CD$), E mijlocul lui $[AB]$, F mijlocul lui $[CD]$ şi G mijlocul lui $[EF]$. Prin G se duce o dreaptă d şi se notează cu M, N, P, Q proiecţiile punctelor A, B, C, D pe dreapta d.
Să se demonstreze relaţia: $AM + BN = CP + DQ$.

53. Pe laturile $[AB]$ şi $[CD]$ ale paralelogramului $ABCD$ se iau arbitrar punctele M şi N. Fie P, Q mijloacele laturilor $[AD]$ şi $[BC]$. Notăm cu E, F, G, H punctele de intersecţie ale dreptei PQ cu $[AN]$, $[DM]$, $[BN]$, $[MC]$.
Să se demonstreze că $\frac{EF}{GH}$ = constant.

54. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = AC$) şi $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ mobile astfel încât $[AM] \equiv [CN]$. Ştiind că P este mijlocul lui MN, să se demonstreze că distanţa de la P la BC este constantă.

55. Pe una din diagonalele unui romb, alegem un punct M diferit de punctul de intersecţie al diagonalelor. Să se demonstreze că proiecţiile punctului M pe laturile rombului sunt vârfurile unui trapez isoscel.

56. Fie $X\hat{O}Y$ un unghi şi $[OM$ bisectoarea sa. Pe $[OM$ alegem două puncte distincte A şi B. Să se demonstreze că proiecţiile punctelor A şi B pe laturile unghiului $X\hat{O}Y$ sunt vârfurile unui trapez isoscel.

57. Fie $X\hat{O}Y$ un unghi şi $[OZ$ bisectoarea sa. Pe laturile sale alegem două puncte A şi B astfel încât $OA \neq OB$. Fie A_1 simetricul lui A faţă de $[OZ$ şi B_1 simetricul lui B faţă de $[OZ$.

Să se demonstreze că A, A_1, B, B_1 sunt vârfurile unui trapez isoscel.

58. Pe laturile $[AB]$ şi $[AC]$ ale triunghiului oarecare ABC ($m(\hat{A}) \neq 60^o$) se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABD, respectiv ACE. Pe latura $[BC]$, de aceeaşi parte cu A se construieşte triunghiul echilateral BCF. Să se demonstreze că patrulaterul $AEFD$ este paralelogram.

59. Fie ABC un triunghi isoscel $(AB = AC)$. Pe latura $[AB]$ se ia un punct D, iar în exteriorul laturii $[AC]$, dincolo de C, se ia un punct E astfel încât $[CE] \equiv [BD]$.

Să se demonstreze că punctul de intersecţie al segmentelor $[BC]$ şi $[DE]$ este mijlocul segmentului $[BC]$.

60. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ şi E simetricul lui A faţă de BD. Fie $\{M\} = DE \cap BC$. Să se demonstreze că:

a) triunghiul MEC este isoscel;

b) patrulaterul $BDCE$ este trapez isoscel.

8. ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

1. Fie ABC un triunghi oarecare și $MN \parallel BC$, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$. Să se afle lungimea segmentului $[AC]$ știind că:

a) $AM = 3$ cm; $MB = 2$ cm; $AN = 5$ cm

b) $AM = 4$ cm; $MB = 5$ cm; $NC = 7$ cm

c) $AB = 10$ cm; $MB = 3$ cm; $NC = 8$ cm

d) $AB = 7$ cm; $MB = 5$ cm; $AN = 4$ cm.

2. Fie ABC un triunghi echilateral și $M \in (AB)$ un punct arbitrar. Prin M se duce paralela la BC care intersectează pe (AC) în N.

Să se demonstreze că triunghiul AMN este echilateral.

3. Fie ABC un triunghi oarecare și $M \in (AB)$ un punct arbitrar. Prin M se duce paralela la AC care intersectează pe (BC) în N, iar prin N se duce paralela la (AB) care intersectează pe (AC) în P. Să se demonstreze relația: $\frac{MA}{MB} = \frac{PC}{PA}$.

4. Fie ABC un triunghi oarecare și $M \in BC$ un punct arbitrar. Prin M se duce paralela la AC care intersectează pe AB în N și paralela la AB care intersectează pe AC în P.

Să se demonstreze că:

a) dacă $M \in (BC)$, atunci $\frac{BN}{AB} + \frac{CP}{AC} = 1$;

b) dacă $M \notin [BC]$, atunci $\left| \frac{BN}{AB} - \frac{CP}{AC} \right| = 1$.

5. Fie ABC un triunghi oarecare și $M \in (BC)$ un punct arbitrar. Prin M se duce paralela la AC, care intersectează pe (AB) în N și paralela la AB care intersectează pe (AC) în P.

Să se demonstreze că $[AB] \equiv [AC]$ dacă și numai dacă $AN + AP = AB$.

6. Fie $ABCD$ un patrulater convex și $M \in (AC)$ un punct arbitrar. Prin M se duce paralela la AD care intersectează pe

(CD) în N şi paralela la AB care intersectează pe (BC) în P.

Să se demonstreze relaţiile:

a) $\frac{CN}{CD}+\frac{BP}{BC}=1$ b) $\frac{NC}{ND}\cdot\frac{PB}{PC}=1$.

7. Fie $ABCD$ un patrulater convex oarecare şi $M\in(AC)$ un punct arbitrar. Prin M se duce paralela la AD, care intersectează pe (CD) în N şi paralela la BC, care intersectează pe (AB) în P. Să se demonstreze că:

a) $NC\cdot PA = ND\cdot PB$;

b) $ND\cdot AB + CD\cdot BP = AB\cdot CD$.

8. Fie $ABCD$ un pătrat şi $M\in(AC)$ un punct arbitrar. Prin M se duce paralela la AD, care intersectează pe (CD) în N şi paralela la AB, care intersectează pe (BC) în P.

Să se demonstreze că patrulaterul $MPCN$ este pătrat.

9. Fie $ABCD$ un paralelogram şi $M\in(AB)$ un punct arbitrar. Prin M se duce paralela la AC care intersectează pe (BD) în N şi paralela la BD care intersectează pe (AC) în P.

Să se demonstreze că: $\frac{AP}{AC}+\frac{BN}{BD}=\frac{1}{2}$.

10. Fie ABC un triunghi în care $AB = 2\cdot BC$. Printr-un punct $M\in(AC)$ ales astfel încât $\frac{AM}{AC}=\frac{1}{3}$ se duce paralela la BC, care intersectează pe (AB) în N şi paralela la AB, care intersectează pe (BC) în P. Să se arate că $[AN]\equiv[CP]$.

11. Fie ABC un triunghi şi $[AD]$ mediană, $D\in(BC)$. O paralelă la AD intersectează dreptele AB şi AC în punctele P, respectiv Q. Să se demonstreze că $\frac{AP}{AQ}=\frac{AB}{AC}$.

12. Fie ABC un triunghi în care $AB = 7$ cm, $BC = 10$ cm, $AC = 8$ cm. Se duce $[AD]$ bisectoarea unghiului $\hat{A}$.

Să se calculeze lungimile segmentelor $[BD]$ şi $[CD]$.

13. Fie ABC un triunghi în care $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Se duce $[AD]$ bisectoarea unghiului $\hat{A}$.

Să se calculeze lungimile segmentelor $[BD]$ și $[CD]$.

14. Fie triunghiul ABC, $D \in (BC)$ astfel încât $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Atunci $[AD$ este bisectoarea interioară a unghiului $\hat{A}$.

(Teorema reciprocă a teoremei bisectoarei interioare)

15. Fie triunghiul ABC, $AB \neq AC$, $D \in BC$, $D \notin [BC]$. Atunci $[AD$ este bisectoarea exterioară a unghiului $\hat{A}$ dacă și numai dacă $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$. (Teorema bisectoarei exterioare).

16. Fie triunghiul ABC, $AB \neq AC$, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Se duce $[AD$ bisectoarea exterioară a unghiului $\hat{A}$.

Să se calculeze lungimile segmentelor $[BD]$ și $[CD]$.

17. Fie triunghiul ABC cu $AB \neq AC$. Dacă:

i) $D \in (BC)$, $E \in BC - [BC]$; ii) $AD \perp AE$; iii) $\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC}$

atunci $(AD$ și $(AE$ reprezintă bisectoarea interioară și respectiv bisectoarea exterioară a unghiului $\hat{A}$.

(Teorema celor două bisectoare)

18. Fie ABC un triunghi oarecare și $[AM]$ mediană. Bisectoarele unghiurilor $A\hat{M}B$ și $A\hat{M}C$ intersectează laturile $[AB]$ și $[AC]$ în N, respectiv în P. Să se demonstreze că $\frac{AN}{AP} = \frac{AB}{AC}$.

19. Fie ABC un triunghi oarecare, $[AD]$ bisectoarea unghiului $\hat{A}$, $[DE]$ și $[DF]$ respectiv bisectoarele unghiurilor $A\hat{D}B$ și $A\hat{D}C$. Să se demonstreze că $\frac{BE}{AE} \cdot \frac{AF}{CF} = \frac{AB}{AC}$.

20. Fie ABC un triunghi oarecare, $[AD]$ înălțimea și $[AM]$ mediana. Știind că $B\hat{A}D \equiv D\hat{A}M \equiv M\hat{A}C$, să se demonstreze că $m(\hat{B}) = 2 \cdot m(\hat{C})$.

21. Fie I intersecţia bisectoarelor triunghiului ABC şi $\{D\} = AI \cap BC$. Să se demonstreze că $\frac{ID}{IA} = \frac{BC}{AC + AB}$.

22. Se dă triunghiul ABC cu $AB = 20$, $BC = 30$, $[BD$ bisectoarea unghiului B, $D \in (AC)$. Ducem $BE \| AB$ ($E \in (BC)$) şi dreapta $EF \| BD$ ($F \in (AC)$).

Să se determine lungimea lui (AC) ştiind că $AD - FC = 1$.

23. Pe latura (BC) a triunghiului ABC, alegem punctul D, astfel încât $\frac{BD}{DC} = k$. Paralela prin D la AB intersectează (AC) în E; paralela prin E la AD intersectează (BC) în F, iar paralela prin F la AB intersectează (AC) în G.

Să se calculeze rapoartele: $\frac{AE}{AC}, \frac{EG}{AC}, \frac{GC}{AC}$.

24. Fie ABC un triunghi oarecare. Pe mediana $[AM]$ luăm un punct T. Fie $\{D\} = CT \cap AB$ şi $\{E\} = BT \cap AC$.

Să se demonstreze că $DE \| BC$.

25. Fie ABC un triunghi, iar $M \in (AB)$, $N \in (AC)$. Să se afle dacă $MN \| BC$, ştiind că:

a) $AM = 3$ cm, $MB = 6$ cm, $AN = 4$ cm, $NC = 8$ cm.
b) $AM = 4$ cm, $AB = 7$ cm, $AN = 2$ cm, $NC = 1{,}5$ cm.
c) $MB = 2$ cm, $AB = 10$ cm, $AN = 7$ cm, $AC = 10$ cm.
d) $MB = 3$ cm, $AB = 4$ cm, $NC = 3$ cm, $AC = 8$ cm.

26. Fie triunghiul isoscel ABC($AB = AC$) şi punctele M şi N, astfel încât $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ şi $[AM] \equiv [AN]$.

Să se demonstreze că dreptele MN şi BC sunt paralele.

27. Pe semidreptele $[OX, [OY, [OZ$ alegem punctele $A, A' \in [OX$, $B, B' \in [OY$, $C, C' \in [OZ$. Ştiind că $AB \| A'B'$ şi $BC \| B'C'$, să se demonstreze că $AC \| A'C'$.

28. Fie triunghiul isoscel $ABC(AB = AC)$ şi $[BB', [CC'$

bisectoare. Să se demonstreze că $B'C' \parallel BC$.

29. Fie $ABCD$ un patrulater convex și $M \in (AC)$ un punct arbitrar. Prin M se duce paralela la AD, care intersectează pe (CD) în N și paralela la AB, care intersectează pe (BC) în P. Să se demonstreze că $NP \parallel BD$.

30. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, în care se duce înălțimea $[AA']$. Alegem un punct P pe segmentul $[AA']$ și un punct Q pe segmentul $[CA']$. Să se demonstreze că $BP \perp AQ$ dacă și numai dacă $\frac{AP}{A'P} = \frac{CQ}{A'Q}$.

31. Fie ABC un triunghi oarecare și $M \in (BC)$. Bisectoarele unghiurilor $A\hat{M}B$ și $A\hat{M}C$ intersectează laturile (AB) și (AC) în N, respectiv în P. Să se demonstreze că $NP \parallel BC$ dacă și numai dacă $[MB] \equiv [MC]$.

32. Fie ABC un triunghi oarecare și D un punct pe latura $[BC]$. Prin D ducem paralela la AB, care intersectează pe (AC) în E, iar prin E ducem paralela la BC care intersectează pe (AB) în F, iar prin F ducem paralela la AC care intersectează pe (BC) în G. Să se demonstreze că după un anumit număr de astfel de construcții „ne întoarcem" în D. Care este acest număr? Ce se întâmplă dacă D este mijlocul segmentului $[BC]$?

33. Fie triunghiul ABC care are lungimile laturilor $AB = 10$ cm, $BC = 11$ cm și $AC = 5$ cm. Pe latura (AB) se ia un punct M astfel încât $BM = 3$ cm. Paralela prin M la BC intersectează pe AC în N. Să se calculeze perimetrul triunghiului AMN.

34. Fie ABC un triunghi și $MN \parallel BC$, $M \in (AB)$ și $N \in (AC)$. Știind că $AM = 3$ cm, $AB = 7$ cm, $NC = 4$ cm, $MN = 2$ cm, să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.

35. Demonstrați că în două triunghiuri asemenea, înălțimile, medianele și bisectoarele laturilor omoloage, sunt în același raport cu raportul de asemănare al triunghiurilor.

36. Pe laturile (AB) şi (AC) ale unui triunghi ABC, se iau punctele M şi N. Să se demonstreze că $A\hat{M}N \equiv A\hat{C}B$ dacă şi numai dacă $AM \cdot AB = AN \cdot AC$.

37. Fie ABC un triunghi oarecare şi B', C' mijloacele laturilor $[AC]$ respectiv $[AB]$, iar M un punct arbitrar pe BC. Să se demonstreze că $B'C'$ trece prin mijlocul segmentului $[AM]$.

38. Fie ABC un triunghi oarecare şi $[AM]$ mediană. O dreaptă d intersectează dreptele AB şi AC în P respectiv Q, iar dreapta AM în R. Să se demonstreze că $PQ \parallel BC$ dacă şi numai dacă $PR = RQ$.

39. Fie ABC un triunghi oarecare şi $[AA']$, $[BB']$ înălţimile corespunzătoare vârfurilor A şi B. Să se demonstreze că:

a) $A'C \cdot BC = B'C \cdot AC$; b) $HA \cdot HA' = HB \cdot HB'$;
c) $AA' \cdot AH = AC \cdot AB'$; d) $A'B \cdot A'C = A'H \cdot AA'$.

40. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = AC$) în care ducem $[AD]$ şi $[BE]$ înălţimi, iar H este ortocentrul triunghiului. Să se demonstreze că dacă $[AD] \equiv [BC]$, atunci $\frac{AH}{AD} \in N$.

41. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic în care ducem înălţimea $[AA']$. Pe semidreapta $(A'A$ alegem un punct H astfel încât $HA' = \frac{A'B \cdot A'C}{AA'}$. Să se demonstreze că H este ortocentrul triunghiului ABC. Dacă $m(\hat{B}) > 90^o$, cum putem afla poziţia ortocentrului pe dreapta AA'?

42. Fie $ABCD$ un dreptunghi. Din vârful D se duce perpendiculara DE pe diagonala AC.
Să se demonstreze că $AB \cdot AE = AD \cdot DE$.

43. Fie $ABCD$ un dreptunghi, E un punct arbitrar pe seg-

mentul $[CD]$ și $\{F\} = AE \cap BC$.

Să se demonstreze că $AD \cdot AB = BF \cdot DE$.

44. Se consideră dreptunghiul $ABCD$. Perpendiculara din A pe diagonala $[BD]$, intersectează dreapta BC în F.

Să se demonstreze că $AB^2 = BF \cdot BC$.

45. Fie A un punct pe latura $(OX$ a unghiului $X\hat{O}Y$. Din A ducem $AB \perp (OY$ ($B \in (OY$), din B ducem $BC \perp (OX$ ($C \in (OX$), din C ducem $CD \perp (OY$($D \in (OY$).

Să se demonstreze că $BC^2 = AB \cdot CD$.

46. Fie $X\hat{O}Y$ un unghi, $(OZ$ bisectoarea sa și A un punct pe $(OX$. Din A ducem $AB \perp (OZ$, ($B \in (OZ$) și din B ducem $BC \perp (OY$, ($C \in (OY$).

Să se demonstreze că $OB^2 = OA \cdot OC$.

47. Fie $X\hat{O}Y$ un unghi și $A, B \in (OX$, $C \in (OY$. Prin B ducem paralela la AC care intersectează pe $(OY$ în D, iar prin D ducem paralela la BC, care intersectează pe $(OX$ în E.

Să se demonstreze că $OB^2 = OA \cdot OE$.

48. Pe laturile opuse $[AB]$ și $[CD]$ ale unui paralelogram, luăm respectiv punctele M și N astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND} = 2$. Dreptele DM și BN taie diagonala $[AC]$ în punctele R și S.

Să se demonstreze că $AC = 5 \cdot RS$.

49. În triunghiul dreptunghic ABC se înscrie un pătrat $MNPQ$. Vârfurile M, N se află pe ipotenuza $[BC]$, iar P, Q pe laturile $[AC]$, $[AB]$.

Să se demonstreze că $MN^2 = BM \cdot NC = PC \cdot QA = BQ \cdot PA$.

50. Fie ABC un triunghi în care $[AD]$ este înălțime, $AD = d$ și $BC = a$. Un pătrat are o latură inclusă în (BC), iar celelalte două vârfuri pe (AB) respectiv pe (AC).

Să se calculeze lungimea laturii pătratului în funcţie de a şi d.

51. Fie ABC un triunghi cu $AB = 5$ cm, $AC = 7$ cm şi $BC = 4$ cm. Ducem o dreaptă $MN \parallel BC$, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$. Calculaţi MB şi MN astfel încât perimetrul trapezului $BMNC$ să fie egal cu 12 cm.

52. În triunghiul ABC avem $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Fie $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $MN \parallel BC$. Să se determine poziţia punctului M astfel încât triunghiul AMN şi trapezul $BCNM$ să aibă acelaşi perimetru.

53. Fie $ABCD$ un paralelogram şi M, N mijloacele laturilor $[BC]$ şi respectiv $[CD]$. Ştiind că $\{F\} = AM \cap BN$, să se calculeze raportul $\frac{AF}{AM}$.

54. Într-un paralelogram $ABCD$ se duc două paralele MN şi PR la egală distanţă de diagonala $[BD]$ a paralelogramului. Să se demonstreze că patrulaterul $MNPR$ este paralelogram.

55. Fie $ABCD$ un paralelogram şi o dreaptă oarecare dusă prin A, care intersectează diagonala $[BD]$ în punctul Q, dreapta BC în punctul P şi dreapta CD în punctul N.

Să se demonstreze că $AQ^2 = QN \cdot QP$.

56. Fie $ABCD$ un paralelogram. Pe latura $[AD]$ luăm punctele E şi F. Fie $\{G\} = BE \cap CD$ şi $\{H\} = CF \cap AB$.

Să se demonstreze că:

a) $\Delta ABE \sim \Delta CGB$;

b) $AE \cdot CG = DF \cdot BH$.

57. O dreaptă taie laturile unui unghi de 120^o şi bisectoarea lui în A, B, C. Vârful unghiului fiind O, să se arate că $\frac{1}{OC} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB}$.

58. Pe latura (AB) a triunghiului ABC se consideră un punct C_1. Prin A se duce paralela la CC_1 care intersectează pe BC în A_1 şi prin B paralela la CC_1 care intersectează pe AC în B_1.

Să se demonstreze că $\frac{1}{AA_1}+\frac{1}{BB_1}=\frac{1}{CC_1}$. Ce se întâmplă când $C_1 \in AB-[AB]$?

59. Se dă un romb $ABCD$, având lungimea laturii a. Prin vârful A se duce o secantă oarecare, care intersectează prelungirile laturilor $[BC]$, $[CD]$ respectiv în E şi F.

Să se demonstreze că $\frac{1}{CE}+\frac{1}{CF}=\frac{1}{a}$.

60. Fie $ABCD$ un trapez oarecare cu bazele $AB=a$, $CD=b$ şi O intersecţia diagonalelor $[AC]$ şi $[BD]$. Paralela prin O la baze taie laturile neparalele în M şi N.

Să se demonstreze că $[OM] \equiv [ON]$ şi să se calculeze lungimea segmentului $[MN]$ în funcţie de a şi b.

61. Fie $ABCD$ un trapez având baza mică $AB=a$ şi baza mare $CD=b$. Pe latura $[AD]$ se ia un punct M. Prin M se duce paralela MN la cele două baze, $N \in [BC]$.

Să se calculeze lungimea lui MN în funcţie de a şi b, ştiind că:

a) $\frac{MA}{MD}=2$ b) $\frac{MA}{MD}=k$, $k>0$.

62. Se consideră un trapez $ABCD$ cu laturile paralele BC şi AD. Fie O punctul de intersecţie al diagonalelor.

Să se demonstreze că: $\frac{AD}{BC}\cdot\frac{BD}{AC}=\frac{OD}{OC}$.

63. Într-un triunghi dreptunghic ABC ($m(\hat{A})=90^o$), se notează cu O mijlocul ipotenuzei $[BC]$. Fie d perpendiculara în A pe OA. Proiecţiile punctelor B şi C pe d se notează cu B' respectiv C'. Să se demonstreze relaţiile:

a) $BB'+CC'=BC$ b) $BB'\cdot CC'=\frac{1}{4}\cdot B'C'^2$.

9. RELAŢII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

1. Să se calculeze înălţimea triunghiului echilateral ABC, cunoscând: a) $AB = 7$ cm ; b) $AB = 1$ cm.

2. Fie ABC un triunghi dreptunghic şi $[AD]$ înălţimea.
Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC, ştiind că:
a) $AC = 5$ cm ; $DC = 4$ cm
b) $AB = 2\sqrt{13}$ cm ; $DC = 9$ cm
c) $AC = 2\sqrt{15}$ cm ; $AD = 2\sqrt{6}$ cm
d) $AD = \sqrt{6}$ cm ; $BD = \sqrt{3}$ cm
e) $BD = 4\sqrt{3}$ cm ; $CD = \sqrt{3}$ cm.

3. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic ($m(\hat{A}) = 90^o$) cu baza mare $[AB]$, iar $AC \perp BC$.
Să se calculeze perimetrul trapezului , ştiind că:
a) $AB = 20$ cm; $CD = 12$ cm
b) $AB = 10$ cm; $BC = 8$ cm
c) $BC = 10$ cm; $AD = 8$ cm
d) $CD = 4$ cm; $AD = 3$ cm
e) $BC = 4$ cm; $CD = \frac{9}{5}$ cm
f) $AB = 7$ cm; $AD = 2\sqrt{3}$ cm.

4. Fie $ABCD$ un romb a cărui înălţime are lungimea h.
Să se calculeze latura rombului, ştiind că:
a) $AC = 6$ cm; $BD = 8$ cm b) $AC = 20$ cm; $h = 16$ cm.

5. Fie triunghiul isoscel ABC($AB = AC$) în care se consideră $AD \perp BC$, $D \in (BC)$ şi $DE \perp AC$, $E \in (AC)$. Ştiind că $DE = 6$cm, $AB = \frac{25}{2}$cm, să se calculeze lungimea laturii $[BC]$.

6. Fie $ABCD$ un trapez isoscel, $AB \parallel CD$, $AD = BC = 4$ cm, $AB = 10$ cm şi $AC \perp BC$.
Să se calculeze lungimea segmentului $[CD]$.

7. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, în care ducem înălţimea $[AD]$. Ştiind că $BC = 4 \cdot BD$ şi $AD = 15$, să se calculeze lungimea catetelor $[AB]$ şi $[AC]$.

8. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC$, $B\hat{A}C$ obtuz şi $AD \perp AB$, $D \in (BC)$. Să se calculeze valoarea raportului $\frac{CD}{BD}$ ştiind că $BC = 8$ cm şi distanţa de la A la dreapta BC este de 3 cm.

9. Într-un dreptunghi $ABCD$ se dau laturile $AB = 4$ cm, $AD = 3$ cm. Din vârful D se duce perpendiculara pe AC, care intersectează pe AC în E şi pe AB în F.
Să se calculeze lungimile AF, DF, AE, ED şi EF.

10. Fie ABC un triunghi şi $D = pr_{BC} A$. Perpendiculara în A pe AB, intersectează pe BC în E. Dacă $AB = 5$ cm, $BC = 8$ cm, $AD = 4$ cm, să se afle perimetrul triunghiului ACE.

11. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic cu baza mare $[AB]$ şi înălţimea $[AD]$, în care $AB = 10$ cm, $BC = 8$ cm şi $AC = 6$ cm.
Să se calculeze perimetrul trapezului.

12. Fie un trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$), având $AD = 9$ cm, $BC = 12$ cm, $AB = 20$ cm, $AB = 4 \cdot CD$. Să se demonstreze că $AD \perp BC$.

13. Se consideră pătratul $ABCD$ cu laturile de lungime a. Pe laturile (BC) şi (DC) se iau punctele E, respectiv F, astfel încât $BE = \frac{1}{3} \cdot a$ şi $CF = \frac{2}{9} \cdot a$. Să se demonstreze că $AE \perp EF$.

14. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, cu catetele $AB = a$, $AC = b$ şi înălţimea $[AA']$. Să se determine lungimile segmentelor $[A'B]$, $[A'C]$, $[AA']$.

15. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = AC$) în care ducem înălţimea $[AD]$. Pe dreapta AD luăm punctul O, astfel încât

$OA = OB = OC = x$. Să se calculeze x știind că:
a) $AB = 5$ cm; $AD = 4$ cm b) $AC = 5$ cm ; $AD = 3$ cm.

16. Fie ABC un triunghi. Să se calculeze lungimea înălțimii corespunzătoare laturii $[BC]$, știind că:
a) $AB = 9$ cm ; $BC = 7$ cm ; $CA = 11$ cm
b) $AB = 7$ cm ; $BC = 9$ cm ; $CA = 13$ cm.

17. Fie $ABCD$ un romb. Să se demonstreze că:
$$AC^2 + BD^2 = 4 \cdot AB^2.$$

18. În triunghiul ABC, $D = pr_{BC} A$. Dacă $D \in (BC)$ și $AD^2 = BD \cdot DC$, atunci $m(\hat{A}) = 90^o$.

19. În triunghiul ABC, $D = pr_{BC} A$. Dacă $D \notin (BC)$ și $AD^2 = BD \cdot DC$, atunci $| m(\hat{B}) - m(\hat{C}) | = 90^o$.

20. Fie triunghiul ABC, $D = pr_{BC} A$. Dacă $D \in (BC)$ și $AB^2 = BD \cdot BC$ (sau $AC^2 = CD \cdot CB$), atunci $m(\hat{A}) = 90^o$.

21. Fie triunghiul ABC. Dacă $D \in (BC)$ și $AB^2 = BD \cdot BC$, $AC^2 = CD \cdot CB$, atunci $m(\hat{A}) = 90^o$.

22. Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii din vârful unghiului drept este egală cu raportul dintre produsul lungimilor catetelor și lungimea ipotenuzei.

23. Fie triunghiul ABC, $D = pr_{BC} A$. Dacă are loc relația $AD \cdot BC = AB \cdot AC$, atunci $m(\hat{A}) = 90^o$.

24. Fie ABC un triunghi oarecare și $D \in (BC)$. Să se demonstreze că $AD \perp BC$ dacă și numai dacă are loc relația: $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$.

25. Fie ABC un triunghi oarecare și $[AD]$ înălțimea corespunzătoare lui A. Se iau segmentele $[BE] \equiv [CD]$ și $[CF] \equiv$

$\equiv [BD]$ perpendiculare pe AB, respectiv AC. Fie B' şi C' proiecţiile lui B şi C pe AE, respectiv AF.

Să se demonstreze că:

a) $[AE] \equiv [AF]$ b) $\frac{AB'}{AC'} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

26. Fie ABC un triunghi oarecare şi $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Să se demonstreze că $m(\hat{A}) = 90^o$ dacă şi numai dacă

$$\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}.$$

27. Fie ABC un triunghi oarecare, în care $[CE]$ este înălţime. Prin E ducem arbitrar o dreaptă d şi $BM \perp d$, $CN \perp d$. Să se demonstreze că:

$$BC^2 = BM^2 + ME^2 + EN^2 + NC^2.$$

28. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, M un punct arbitrar pe $[AC]$ şi $N \in [BC]$ astfel încât $MN \perp BC$.

Să se demonstreze că: $MN^2 = NB \cdot NC - MA \cdot MC$.

29. Fie $ABCD$ un patrulater astfel încât $AB \perp AD$ şi $BC \perp \perp CD$. Să se demonstreze că $AB^2 + AD^2 = BC^2 + CD^2$.

30. Fie $ABCD$ un patrulater cu diagonalele perpendiculare. Să se demonstreze că $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$.

31. Fie $ABCD$ ($AB \parallel CD$) un trapez, în care diagonala $[AC]$ este perpendiculară pe baze.

Să se demonstreze că $AD^2 + AB^2 = BC^2 + CD^2$.

32. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic în punctele A şi D.

Să se demonstreze că $AB^2 + AC^2 = BD^2 + CD^2$.

33. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic în punctele A şi D.

Să se demonstreze că $BC^2 - AD^2 = (AB - CD)^2$.

34. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic în punctele A şi D şi $AC \perp BC$. Să se demonstreze că:

a) $AC^2 = AB \cdot CD$

b) $BC^2 + AB \cdot CD = AB^2$

c) $AB^2 = BC^2 + CD^2 + AD^2$.

35. Fie $ABCD$ un patrulater cu diagonalele perpendiculare. Din punctul O de intersecţie al diagonalelor, se duc perpendicularele OM, ON, OP, OQ respectiv pe AB, BC, CD, DA.

Să se demonstreze că:

a) $AM \cdot BN \cdot CP \cdot DQ = BM \cdot CN \cdot DP \cdot AQ$

b) $\frac{AB}{OM} = \frac{OA}{OB} + \frac{OB}{OA}$.

36. Se consideră un trapez dreptunghic, în care $m(\hat{A}) = 90^o$ şi $AB \parallel CD$. Să se demonstreze că $AC \perp BD$ dacă şi numai dacă $AD^2 = AB \cdot CD$.

37. Se consideră un trapez $ABCD$ în care $AB \parallel CD$, $AD \perp DC$ şi diagonalele AC, BD sunt perpendiculare.

Să se calculeze raportul $\frac{AC}{BD}$ ştiind că $\frac{AB}{CD} = k$.

38. Fie $ABCD$ un trapez cu diagonalele perpendiculare.

Să se demonstreze că $(AB + CD)^2 = AC^2 + BD^2$.

39. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A şi $[AD]$ înălţimea dusă din A. Fie E şi F proiecţiile punctului D pe catetele $[AB]$ şi $[AC]$. Să se demonstreze că:

a) $AE^2 + AF^2 = AD^2$

b) $AE \cdot BE + AF \cdot CF = DB \cdot DC$.

40. Fie triunghiul ABC cu $m(\hat{A}) = 90^o$, $AD \perp BC$, $DE \perp BA$, $DF \perp AC$, $EG \perp BC$, $FH \perp BC$.

a) Să se demonstreze relaţia $GD^2 = EG \cdot FH$.

b) Să se demonstreze că $AB = AC$ dacă şi numai dacă G şi H sunt mijloacele segmentelor $[BD]$ şi respectiv $[DC]$.

10. CERCUL

1. Pe un cerc se consideră 5 puncte A, B, C, D, E în această ordine. Să se demonstreze că $[BE$ este bisectoarea unghiului $A\hat{B}D$ dacă şi numai dacă $[CE$ este bisectoarea unghiului $A\hat{C}D$.

2. Într-un cerc $C(O, R)$ se duce o coardă $[AB]$ şi se iau două puncte C, D pe cerc, de o parte şi de alta a dreptei AB. Fie $[CM$ bisectoarea unghiului $A\hat{C}B$, $M \in C$, $[DN$ bisectoarea unghiului $A\hat{D}B$, $N \in C$.

Să se demonstreze că punctele M, O, N sunt coliniare.

3. Fie A, B, C trei puncte pe un cerc astfel încât $m(B\hat{A}C) = 60°$, iar D, E mijloacele arcelor AB şi AC. Dreapta DE intersectează pe AB şi respectiv AC în F şi G.

Să se demonstreze că triunghiul AFG este echilateral.

4. Fie $[AB]$ şi $[CD]$ doi diametri într-un cerc de centru O. Să se demonstreze că patrulaterul $ACBD$ este dreptunghi. În ce situaţie patrulaterul $ACBD$ este pătrat?

5. Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc şi D un punct pe arcul BC astfel încât A şi D să fie situate de o parte şi de alta a dreptei BC. Fie E punctul de intersecţie al bisectoarelor unghiurilor $\hat{B}$ şi $\hat{C}$. Să se demonstreze relaţia :

$$m(B\hat{D}C) + 2 \cdot m(B\hat{E}C) = 360°.$$

6. Se dă triunghiul ABC înscris în cercul $C(O, r)$ şi se notează cu D mijlocul arcului BC. Să se demonstreze că:

$$m(A\hat{D}O) = \frac{|\, m(\hat{B}) - m(\hat{C}) \,|}{2}.$$

7. Dacă coardele (AB) şi (CD) ale unui cerc sunt congruente, atunci $AC \,||\, BD$ sau $AD \,||\, BC$.

8. Se consideră un triunghi ascuţitunghic ABC înscris într-un cerc şi se notează cu M, N şi P mijloacele arcelor mici AB, BC, CA. Să se demonstreze că, dacă $P\hat{M}N \equiv B\hat{A}C$ şi

$M\hat{N}P \equiv A\hat{C}B$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

9. Fie ABC un triunghi oarecare, O punctul de intersecţie al bisectoarelor, iar M, N, P punctele în care bisectoarele unghiurilor $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ intersectează cercul circumscris triunghiului ABC. Să se demonstreze că O este ortocentrul triunghiului MNP.

10. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = AC$), H ortocentrul triunghiului, iar D, E, F punctele în care înălţimile triunghiului intersectează cercul circumscris triunghiului ABC.

Să se demonstreze că : $[FB] \equiv [BD] \equiv [DC] \equiv [CE]$.

11. Un trapez isoscel $ABCD$ înscris într-un cerc, are baza mică $[CD]$ egală cu laturile neparalele ale trapezului. Se notează cu D' punctul diametral opus punctului D. Segmentul $[DD']$ întâlneşte baza mare în E.

Să se demonstreze că triunghiul ADE este isoscel.

12. Pe diagonala $[AC]$ a pătratului $ABCD$ înscris în cercul de centru O se ia punctul E astfel încât $[AE] \equiv [AB]$. Dreapta BE intersectează a doua oară cercul în M şi dreapta DM intersectează dreapta AC în F. Să se arate că $[CF] \equiv [AB]$.

13. Triunghiul isoscel OAB are vârful O în centrul unui cerc dat, iar baza $[AB]$ intersectează cercul în C şi D.

Să se arate că $[AC] \equiv [BD]$.

14. Se consideră un cerc de centru O şi de rază 13 cm şi un punct M, astfel încât $OM = 5$ cm. O coardă $AB = 25$ cm trece prin M. Să se calculeze lungimile segmentelor determinate de M pe AB.

15. Să se calculeze raza cercului circumscris unui triunghi isoscel ABC, în care $AB = AC = 15$ şi $BC = 18$.

16. În interiorul unui cerc de centru O se ia un punct A. Cum putem duce prin A o coardă astfel încât mijlocul ei să fie chiar A?

17. Într-un cerc se duc trei coarde $[MA]$, $[MB]$, $[MC]$ şi în punctele A, B, C se ridică perpendiculare pe ele. Să se demonstreze că aceste perpendiculare sunt concurente.

18. Fie ABC un triunghi oarecare. Să se demonstreze că mediatoarea unei laturi a triunghiului se intersectează cu bisectoarea unghiului opus pe cercul circumscris triunghiului.

19. Fie ABC un triunghi. Să se demonstreze că bisectoarea din A coincide cu mediana din A dacă şi numai dacă $[AB] \equiv [AC]$.

20. Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc de centru O şi $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp CD$, $OQ \perp DA$. Să se demonstreze că $ABCD$ este pătrat dacă şi numai dacă $[OM] \equiv [ON] \equiv [OP] \equiv [OQ]$.

21. Fie A şi B două puncte situate pe diametrul $[CD]$ al unui cerc şi egal depărtat de centru. Prin A şi B ducem coardele paralele MM' şi NN'. Să se demonstreze că:

a) $[MM'] \equiv [NN']$;

b) punctele N, O, M' sunt coliniare.

22. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil, E punctul de intersecţie al laturilor AD şi BC, M punctul de intersecţie al diagonalelor. Bisectoarea unghiului $\hat{E}$ taie diagonalele $[BD]$ şi $[AC]$ în N şi P. Să se arate că triunghiul MNP este isoscel.

23. Fie A,B două puncte pe un cerc astfel încât $m(\hat{AOB}) = 120^0$. Ducem din A şi B tangentele la cerc care se intersectează în C. Să se demonstreze că triunghiul ABC este echilateral.

24. Se consideră cercul $C(O, r)$, punctul $M \in C(O, r)$ şi h tangenta în M la cerc. Să se demonstreze că pentru orice coardă $[AB]$, paralelă cu h, punctul M este mijlocul arcului AMB.

25. Fie un cerc de diametru $[AB]$ şi centru O. Prelungim diametrul cu $BC = OA$. Mediatoarea segmentului $[AC]$ inter-

sectează cercul în T şi T'. Să se demonstreze că CT şi CT' sunt tangente la cerc.

26. Fie un cerc de centru O şi punctele A şi B pe cerc astfel încât $m(A\hat{O}B) = 120^o$, iar M un punct arbitrar pe arcul mic AB. Tangentele în A şi B la cerc intersectează tangenta în M la cerc în punctele C şi D. Să se determine poziţia punctului M astfel încât triunghiul OCD să fie echilateral.

27. Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc de centru O şi D punctul de intersecţie al perpendicularei duse din O pe AB cu tangenta în B la cerc. Să se arate că DB este tangentă la cerc.

28. Pe un cerc de centru O, se ia un punct A. Dintr-un punct C situat pe tangenta în A se duce a doua tangentă CB la cerc. Paralela prin B la dreapta AC intersectează dreapta CO în D.
Să se demonstreze că patrulaterul $ACBD$ este romb.

29. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = AC$) şi D mijlocul lui $[BC]$. Dacă $DE \perp AC$, să se demonstreze că DE este tangentă cercului circumscris triunghiului ABD.

30. Fie ABC un triunghi, (CB' semidreapta opusă lui (CB, iar $D \in Int(A\hat{C}B')$. Să se arate că dreapta CD este tangentă cercului circumscris triunghiului ABC dacă şi numai dacă $A\hat{C}D \equiv A\hat{B}C$.

31. Se dă un cerc $C(O, r)$ în care este înscris triunghiul isoscel ABC($AB = AC$). Prin A se duce o secantă care intersectează BC în E şi cercul în F. Să se arate că AB este tangentă la cercul circumscris triunghiului BEF.

32. Fie $ABCD$ un romb. Prin vârful A se duce o dreaptă arbitrară care intersectează pe BC în M, pe DC în N şi pe BD în P. Să se demonstreze că dreapta CP este tangentă la cercul circumscris triunghiului CMN.

33. **În triunghiul ABC înălţimea CC_1 este tangentă cercului**

circumscris triunghiului ABC. Să se arate că :

a) $|m(\hat{A}) - m(\hat{B})| = 90^\circ$; b) $CC_1^2 = BC_1 \cdot AC_1$.

34. Se consideră un cerc de centru O şi $[AB]$ un diametru al său. Se duce o tangentă variabilă MN mărginită de tangentele în A şi B la cerc. Să se demonstreze că:

a) MON = constant; b) $AM \cdot NB$ = constant.

35. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = AC$) şi $AD \perp BC$. Un cerc ce trece prin A şi B şi este tangent în B la BC, intersectează pe AD în E. Să se arate că $BE \perp AC$.

36. Tangentele în B şi C la cercul circumscris triunghiului ABC se intersectează în D. Ducem prin D o paralelă la tangenta în A care intersectează pe AB în A' şi pe AC în D'.

Să se demonstreze că D este mijlocul lui $[A'D']$.

37. Fie un cerc în care ducem diametrele $[AB]$ şi $[CD]$. Prin punctele A, B, C şi D ducem tangente la cerc, care se intersectează în M, N, P, Q. Ce fel de patrulater este $MNPQ$?

38. Tangentele în punctele A şi B la un cerc de centru O se întâlnesc într-un punct C. Prin A se duce paralela la BC, care întâlneşte din nou cercul în D, dreapta CD întâlneşte a doua oară cercul în E, iar AE întâlneşte pe BC în F. Să se demonstreze relaţia : $FC^2 = FE \cdot FA = FB^2$.

39. Se consideră un cerc de centru O. Din punctul A exterior cercului se duc tangentele AB şi AC la cerc. Paralela prin C la AB taie cercul a doua oară în D. AD intersectează cercul a doua oară în E. Pe dreapta CE, se ia un punct F astfel încât unghiurile $A\hat{F}C$ şi $A\hat{C}F$ să fie congruente. Notăm cu G punctul de intersecţie al dreptelor AF şi BE. Să se arate că punctul A este mijlocul lui $[GF]$.

40. Fie $ABCD$ un patrulater circumscris unui cerc. Să se demonstreze că are loc relaţia : $AB + CD = BC + AD$.

41. Fie $ABCD$ un trapez circumscris unui cerc şi O centrul cercului. Să se demonstreze că triunghiurile OAD şi OBC sunt dreptunghice.

42. Fie $ABCD$ un trapez circumscris unui cerc, de centru O şi EF linia mijlocie a trapezului. Să se demonstreze că suma laturilor neparalele este egală cu dublul liniei mijlocii.

43. Dacă un trapez isoscel este circumscris unui cerc, atunci diametrul cercului este media geometrică a bazelor trapezului.

44. Fie ABC un triunghi oarecare, iar M, N mijloacele laturilor $[AB], [AC]$. Să se demonstreze că dacă MN este tangentă cercului înscris în triunghiul ABC, atunci are loc relaţia: $AB + AC = 3 \cdot BC$.

45. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A şi d lungimea diametrului cercului înscris triunghiului.
Să se demonstreze relaţia: $d = AB + AC - BC$.

46. Într-un dreptunghi $ABCD\,(AB > AC)$ se duce diagonala AC. Fie E şi F punctele de tangenţă cu diagonala AC ale cercurilor înscrise respectiv în triunghiurile ABC şi ACD. Să se calculeze lungimea segmentului EF în funcţie de laturile $AB = a$, $BC = b$.

47. Prin vârfurile triunghiului ABC se duc tangentele la cercul circumscris care formează triunghiul $A'B'C'$. Se notează cu A_1, B_1, C_1 centrele cercurilor înscrise în triunghiurile $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$. Să se demonstreze că AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.

48. Fie $ABCD$ un paralelogram. Să se demonstreze că $ABCD$ este circumscris unui cerc dacă şi numai dacă este romb.

49. Fie $ABCD$ un paralelogram. Să se demonstreze că $ABCD$ este inscriptibil dacă şi numai dacă este dreptunghi.

50. Fie $ABCD$ un trapez. Să se demonstreze că $ABCD$ este

inscriptibil dacă şi numai dacă este isoscel.

51. Se consideră două cercuri de centre O_1 şi O_2, având aceeaşi rază şi care se intersectează în punctele A şi B.
Să se demonstreze că $O_1A \parallel O_2B$.

52. Două cercuri de centre O_1 şi O_2 se intersectează în punctele A şi B. Să se demonstreze că $[O_1O_2]$ este mediatoarea segmentului $[AB]$.

53. Două cercuri de centre O_1 şi O_2 se intersectează în punctele A şi B. Fie C şi D punctele diametral opuse ale lui A în cele două cercuri. Să se demonstreze că:
a) punctele C, B, D sunt coliniare;
b) $CD = 2 \cdot O_1O_2$.

54. Două cercuri se intersectează în A şi B. O secantă variabilă trecând prin A taie cercurile a doua oară în M şi N. Să se arate că măsura unghiului $M\hat{B}N$ este constantă. Să se determine poziţia lui MN astfel ca distanţa MN să fie maximă.

55. Prin punctele comune A şi B a două cercuri $C(O_1, r_1)$ şi $C(O_2, r_2)$ se duc secantele arbitrare MAN şi PBQ, $M, P \in C(O_1, r_1)$. Să se demonstreze că:
a) $P\hat{A}Q \equiv MBN$; b) $MP \parallel NQ$.

56. Se dau două cercuri secante $C(O_1, r_1)$ şi $C(O_2, r_2)$ trecând prin centrul O_1. Tangentele comune la aceste cercuri au punctele de contact cu cercul $C(O_2, r_2)$ în A şi B. Să se demonstreze că dreapta AB este tangentă cercului $C(O_1, r_1)$.

57. Fie C_1 şi C_2 două cercuri secante de centre O_1 şi O_2 şi de raze diferite. Tangentele comune celor două cercuri se intersectează în T. Să se demonstreze că punctele O_1, O_2, T sunt coliniare.

58. Se duc în triunghiul ABC **cercurile** de diametre $[AB]$ şi $[AC]$. În primul cerc se duce un **diametru** EF paralel cu AC şi

în al doilea cerc un diametru GH paralel cu AB (punctele F și H sunt în interiorul unghiului $B\hat{A}C$).

Să se demonstreze că punctele A, H, F sunt coliniare.

59. Se consideră două cercuri de centre O și O_1 tangente interioare sau exterioare în A. Prin A se duce o secantă oarecare ce taie cercurile date în M și N. Să se demonstreze că tangentele în M și N la cercurile respective sunt paralele.

60. Fie A și B punctele de contact ale unei tangente comune cercurilor de centre O și O_1. Din O și O_1 se duc ON și O_1M tangente respectiv la cercurile de centre O_1 și O.

Să se demonstreze relația: $O_1A^2 - O_1M^2 = OB^2 - ON^2$.

61. Se dau două cercuri $C(O_1, r_1)$ și $C(O_2, r_2)$ tangente exterioare. Prin punctul lor comun de tangență T se duc două drepte arbitrare ATC și DTB care intersectează cercul $C(O_1, r_1)$ în A și D și cercul $C(O_2, r_2)$ în C și B.

Să se arate că patrulaterul $ABCD$ este trapez. În ce caz $ABCD$ este paralelogram?

62. Să se arate că lungimea segmentului determinat de punctele de tangență pe tangenta exterioară comună la două cercuri tangente exterioare, este media geometrică a diametrelor celor două cercuri.

63. Se consideră două cercuri $C(O_1, r_1)$ și $C(O_2, r_2)$ tangente exterioare în punctul T. Tangenta exterioară comună AB se intersectează cu tangenta în T la cele două cercuri în punctul C. Să se demonstreze că: a) $TC = \frac{AB}{2}$; b) $AT \perp BT$.

64. Două cercuri sunt tangente exterior. Tangenta comună exterioară AB formează cu cercurile un triunghi curbiliniu. Să se determine raza cercului înscris în acest triunghi curbiliniu.

65. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și D simetricul lui A față de BC. Dacă $AB \cap DC = \{E\}$ și $AC \cap BD = \{F\}$, să

se demonstreze că patrulaterul $ADFE$ este inscriptibil.

66. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil și M, N, P, Q mijloacele arcelor AB, BC, CD, DA. Să se demonstreze că patrulaterul $MNPQ$ are diagonalele perpendiculare.

67. Fie A un punct exterior unui cerc. Din A se duc două secante arbitrare ACB și ADE. Știind că $BC = 47$ cm, $AC = 9$ cm și DE este cu 72 cm mai mare decât AD, să se calculeze AE.

68. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A. Pe ipotenuza BC se construiește în exterior pătratul $BCDE$, ale cărui diagonale se intersectează în O. Să se demonstreze că $[AO$ este bisectoarea unghiului $B\hat{A}C$.

69. În triunghiul isoscel $ABC(AB = AC)$ se cunoaște $BC = 2a$ și înălțimea din A, $AD = b$, $b \geq a$. Considerând punctul $M \in AC$, să se determine $x = AM$ astfel încât patrulaterul $AMDB$ să fie inscriptibil.

70. Fie ABC un triunghi cu $m(\hat{A}) = 60°$ și BB', CC' bisectoarele unghiurilor $\hat{B}$ și $\hat{C}$. Să se calculeze $m(B\hat{B}'C')$.

71. Fie ABC un triunghi oarecare. Mediana $[AM]$ a triunghiului intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în A'. Fie G simetricul lui A' față de M și $\{D\} = AB \cap CG$ și $\{E\} = AC \cap BG$. Să se arate că patrulaterul $ADGE$ este inscriptibil.

72. Fie $ABCD$ un trapez isoscel, iar M, N, P, Q intersecțiile bisectoarelor unghiurilor. Să se demonstreze că $MNPQ$ este patrulater inscriptibil.

73. Fie ABC un triunghi echilateral și punctele $D \in [AB]$, $E \in [AC]$ astfel încât $[AD] \equiv [CE]$, iar $\{I\} = BE \cap CD$.
Să se demonstreze că patrulaterul $ADIE$ este inscriptibil.

74. Se consideră triunghiul echilateral ABC şi se construiesc în exteriorul lui pătratele $ABMN$ şi $BCQP$. Fie S intersecţia dreptelor AP şi MC. Să se arate că patrulaterele $ASMN$ şi $CSPQ$ sunt inscriptibile.

75. Fie $ABCD$ un patrulater cu diagonalele perpendiculare, O intersecţia diagonalelor, iar O_1, O_2, O_3, O_4 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor AOB, BOC, COD, DOA.
Să se demonstreze că $O_1O_2O_3O_4$ este dreptunghi.

76. Fie ABC un triunghi oarecare. Să se demonstreze că cercurile de diametre $[AB]$ şi $[AC]$ se intersectează pe dreapta BC.

77. Pe laturile unui patrulater $ABCD$, ca diametre, se descriu cercuri. Să se arate că, coarda comună cercurilor descrise pe AB şi BC este paralelă cu coarda comună cercurilor descrise pe AD şi CD.

78. Fie ABC un triunghi oarecare şi D, E, F picioarele înălţimilor duse din A, B respectiv C. Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor AEF, BFD, CDE au un punct comun.

79. Fie ABC un triunghi oarecare şi D, E, F picioarele înălţimilor duse din A, B respectiv C. Să se arate că:
a) triunghiurile AEF, DEC şi DBF sunt asemenea cu triunghiul ABC.
b) bisectoarele triunghiului DEF coincid cu înălţimile triunghiului ABC.

80. În cercul $C(O, r)$ se duce diametrul (AB) şi tangenta în A, pe care se iau două puncte oarecare C şi D, separate fiind de A. Dreptele CB şi DB intersectează cercul $C(O, r)$ în E şi F. Să se arate că patrulaterul $CDFE$ este inscriptibil. Ce devine acest patrulater în cazul în care $[AC] \equiv [AD]$?

81. Fie $ABCD$ un paralelogram. Cercul circumscris triunghiului ABC intersectează dreapta CD în punctul M.

Să se demonstreze că $[AD] \equiv [AM]$.

82. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A şi $[AD]$ înălţimea. Ducem liniile mijlocii $[MN]$ şi $[MP]$ în triunghiurile dreptunghice ABD şi ACD. Acestea intersectează medianele $[DE]$ şi $[DF]$ din acelaşi triunghi în Q şi P. Să se demonstreze că patrulaterul $MQDP$ este inscriptibil.

83. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, d o dreaptă arbitrară ce trece prin A, E şi F proiecţiile punctelor B şi C pe d, iar $[AD]$ înălţimea triunghiului. Să se demonstreze că:

$$m(B\hat{D}E) + m(C\hat{D}F) = m(D\hat{E}F) + m(E\hat{F}D).$$

84. Fie $ABCD$ un patrulater cu diagonalele perpendiculare şi $\{O\} = AC \cap BD$. Dacă M, N, P, Q sunt proiecţiile punctului O pe laturile AB, BC, CD, DA ale patrulaterului, să se demonstreze că patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil.

85. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A şi $[AD]$ înălţimea din A. Bisectoarele unghiurilor $A\hat{D}B$ şi $A\hat{D}C$ intersectează catetele AB şi AC în M şi respectiv în N.

Să se demonstreze că $D\hat{N}M \equiv A\hat{C}B$.

86. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, D mijlocul lui $[AC]$, iar E, F proiecţiile punctului A pe BD respectiv pe BC.

Să se demonstreze că patrulaterul $CDEF$ este inscriptibil.

87. Se consideră patrulaterul $ABCD$ astfel încât $AC \perp BC$ şi $BD \perp AD$. Fie $\{O\} = AC \cap BD$ şi MN o dreaptă ce trece prin O, $M \in (AD)$, $N \in (BC)$. Se duc perpendicularele $MM' \perp AC$ şi $NN' \perp BD$. Să se arate că $CN' \parallel DM'$.

88. Fie ABC un triunghi oarecare şi D un punct în interiorul lui. Punctul D se proiectează pe laturile AB, AC şi BC în punctele E, F şi G. Să se demonstreze că:

$$m(B\hat{D}C) = m(E\hat{A}F) + m(E\hat{G}F).$$

89. Se consideră două cercuri de centre O_1 şi O_2 tangente exterior în T. Fie MN una dintre tangentele comune exterioare (M şi N punctele de tangenţă) şi A, B punctele în care O_1O_2 întâlneşte a doua oară cele două cercuri. Să se demonstreze că patrulaterul $AMNB$ este inscriptibil.

90. Se consideră două cercuri de centre O şi O' care se intersectează în A şi B. Prin A se duce o secantă care taie cercurile în C şi C'. Să se demonstreze că : $O\hat{C}B \equiv O'\hat{C}'B$.

91. Se consideră două cercuri arbitrare care se intersectează în punctele A şi B. Dacă o secantă arbitrară intersectează primul cerc în C şi E, iar al doilea cerc în D şi F, să se demonstreze că $C\hat{A}D \equiv E\hat{B}F$.

92. Fie ABC un triunghi cu unghiul A ascuţit şi înălţimile BB' şi CC'. Să se demonstreze că patrulaterul $BCB'C'$ este inscriptibil şi că tangenta în A la cercul circumscris triunghiului este paralelă la dreapta $B'C'$.

93. Fie ABC un triunghi oarecare. Dreapta ce trece prin B şi este paralelă cu tangenta în A la cerc intersectează pe AC în D. Să se demonstreze relaţia : $AB^2 = AC \cdot AD$.

94. Fie ABC un triunghi oarecare şi O centrul cercului circumscris. Prin B şi C se duce un cerc variabil care intersectează laturile AB şi AC în punctele D şi E. Să se demonstreze că dreptele AO şi DE sunt perpendiculare.

95. Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc şi H ortocentrul triunghiului. Să se demonstreze că simetricele punctului H faţă de laturile triunghiului se găsesc pe cerc.

96. Fie ABC un triunghi, H ortocentrul triunghiului, iar A' punctul diametral opus al lui A în cercul circumscris triunghiului. Să se demonstreze că $HBA'C$ este paralelogram. Când $HBA'C$ devine dreptunghi? Dar romb?

97. Fie ABC un triunghi oarecare, H ortocentrul, A_1, B_1, C_1 mijloacele segmentelor $[AH]$, $[BH]$, $[CH]$, iar A', B', C' punctele diametral opuse vârfurilor în cercul circumscris. Ştiind că M, N, P sunt mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$, să se demonstreze că:

a) punctele H, M, A' sunt coliniare.

b) dreptele A_1A', B_1B', C_1C' sunt concurente.

98. Fie ABC un triunghi oarecare, G centrul de greutate, H ortocentrul şi O centrul cercului circumscris triunghiului.

Să se demonstreze că punctele G, H, O sunt coliniare.

99. Fie ABC un triunghi de ortocentru H. Cercul ce trece prin punctele B, H, C intersectează pe AB în D.

Să se demonstreze că $[AH] \equiv [DH]$.

100. Într-un triunghi oarecare ABC, bisectoarea unghiului $\hat{A}$ întâlneşte latura $[BC]$ în D şi cercul circumscris triunghiului ABC în E. Să se demonstreze relaţiile:

a) $AB \cdot CD = AD \cdot EC$; b) $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

101. În triunghiul ABC înscris într-un cerc $C(O, r)$ se duce înălţimea $[AD]$, care taie cercul a doua oară în D'. Notând cu E punctul diametral opus lui A, să se arate că:

a) unghiurile BAC şi $D'AE$ au aceeaşi bisectoare;

b) $AB \cdot AC = 2R \cdot AD$.

102. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = AC$) înscris într-un cerc de centru O şi un punct D arbitrar pe arcul BC (care nu-l conţine pe A) astfel încât $AD \cap BC = \{E\}$.

Să se demonstreze că $AE \cdot AD =$ constant.

103. În triunghiul ABC înscris într-un cerc $C(O, r)$ se duc înălţimile corespunzătoare vârfurilor B şi C şi diametrul prin punctul A. Să se arate că cele două înălţimi şi diametrul, determină un triunghi asemenea cu ABC.

104. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil cu diagonalele

AC şi BD perpendiculare. Să se demonstreze că tangentele duse prin A, B, C, D la cercul circumscris patrulaterului, determină un patrulater inscriptibil.

105. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil în care se poate înscrie un cerc ce intersectează laturile $[AB], [BC], [CD], [DA]$ în punctele M, N, P, Q. Să se demonstreze că $MP \perp NQ$.

106. Să se arate că într-un patrulater inscriptibil o bisectoare interioară se intersectează cu bisectoarea exterioară a unghiului opus, pe cercul circumscris patrulaterului.

107. Să se demonstreze că într-un patrulater inscriptibil, două laturi consecutive sunt egale dacă şi numai dacă unul din unghiurile patrulaterului este egal cu unghiul dintre diagonale.

108. Să se demonstreze că patrulaterul inscriptibil $ABCD$ în care dreptele care unesc mijloacele laturilor opuse sunt perpendiculare este trapez isoscel.

109. Se consideră triunghiul ABC cu toate unghiurile strict mai mici decât 120^o, şi pe laturile triunghiului se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABC_1, ACB_1, BCA_1.

Să se demonstreze că cercurile circumscrise acestor triunghiuri au un punct comun.

110. Fie ABC un triunghi oarecare şi $[AD]$ înălţime, iar A', B', C' mijloacele laturilor $[BC], [AC], [AB]$. Să se demonstreze că A', B', C', D sunt vârfurile unui trapez isoscel.

111. Fie ABC un triunghi, A', B' mijloacele laturilor $[BC]$ şi $[AC]$, D piciorul înălţimii duse din A, H ortocentrul, iar A_1 mijlocul segmentului (AH). Să se arate că punctele A', B', A_1 şi D sunt situate pe un cerc în fiecare din următoarele cazuri posibile: a) $H \in [AD)$; b) $H = D$; c) $H \notin (AD$; $H \notin (DA$.

112. Fie ABC un triunghi, D, E, F picioarele înălţimilor, A', B', C' mijloacele laturilor, H ortocentrul, iar A_1, B_1, C_1

mijloacele segmentelor (AH), (BH), (CH). Să se arate că punctele $D, E, F, A', B', C', A_1, B_1, C_1$ sunt pe un cerc (numit „cercul lui Euler" sau „cercul celor nouă puncte" al triunghiului ABC).

113. Fie ABC un patrulater inscriptibil, cu diagonala BD diametru, O punctul de intersecţie al diagonalelor şi $AC \perp BD$. Să se demonstreze relaţia:

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = BD^2.$$

114. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil cu diagonalele perpendiculare. Să se demonstreze că suma pătratelor lungimilor laturilor acestui patrulater este constantă.

115. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Notăm cu M mijlocul arcului AB, care nu conţine pe C şi D, cu E intersecţia dreptelor DM şi AC, iar cu F intersecţia dreptelor CM şi BD.
Să se demonstreze că patrulaterul $ABFE$ este trapez.

116. Fie $[AB]$ şi $[CD]$ doi diametri perpendiculari într-un cerc de centru O şi $M \in OA$. Dreapta CM intersectează iar cercul în N. Tangenta în N la cerc se intersectează cu paralela prin M la CD în P. Să se demonstreze că patrulaterul $OMNP$ este trapez isoscel.

117. Distanţa de la un punct oarecare al unui cerc la o coardă dată este media geometrică a distanţelor de la acelaşi punct la tangentele duse la cerc prin extremităţile coardei.

118. Fie $ABCD$ un patrulater cu diagonalele perpendiculare, care se intersectează într-un punct P. Dacă M este mijlocul lui $[AB]$, să se demonstreze că : $MP \perp CD$.

119. Fie $ABCD$ un patrulater cu diagonalele perpendiculare, înscris într-un cerc de centru O. Fie $OE \perp BC$, $E \in (BC)$. Atunci $OE = \frac{AD}{2}$.

120. Fie ABC un triunghi oarecare, $[AD]$ bisectoarea unghiului $B\hat{A}C$. Cercul circumscris triunghiului ABD taie pe AC în N, iar cercul circumscris triunghiului ACD taie pe AB în M. Să se demonstreze relaţia : $DM + DN = BC$.

121. Se consideră un cerc care se împarte în trei părţi egale prin punctele A, B, C. Dacă M este un punct al cercului între A şi B, să se arate că : $MA + MB = MC$.

122. Pe laturile unui hexagon regulat se construiesc în exterior, pătrate care au câte o latură comună cu hexagonul. Să se arate că vârfurile acestor pătrate, diferite de vârfurile hexagonului, formează un dodecagon regulat.

123. Dăcă trei cercuri sunt două câte două tangente exterioare, să se determine raportul între suma lungimilor acestor cercuri şi perimetrul triunghiului format de centrele lor.

11. ARII

1. Fie A, B două puncte arbitrare, distincte şi o dreaptă d paralelă cu AB. Să se arate că pentru orice punct M de pe dreapta d, aria triunghiului MAB este constantă.

2. Fie ABC un triunghi oarecare şi M mijlocul lui $[BC]$.
Să se demonstreze că $S_{ABM} = S_{ACM}$.

3. Fie ABC un triunghi oarecare şi D un punct arbitrar pe dreapta $[BC]$. Să se demonstreze relaţia $\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{BD}{DC}$.

4. Fie ABC un triunghi oarecare. Să se aleagă pe dreapta BC un punct D astfel încât:
a) $S_{ABD} = 2 \cdot S_{ADC}$ b) $S_{ABD} = 4 \cdot S_{ADC}$.

5. Fie ABC un triunghi oarecare. În câte moduri şi cum se poate alege un punct D pe dreapta BC, astfel încât:

$$S_{ABD} = n \cdot S_{ADC}.$$

6. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = AC$) şi M un punct pe latura $[BC]$. Notăm cu D şi E proiecţiile punctului M pe laturile $[AB]$ respectiv $[AC]$. Să se demonstreze că $\frac{MD}{ME} = \frac{MB}{MC}$.

7. În triunghiul oarecare ABC se duce mediana $[AM]$. Fie D şi E proiecţiile punctului M pe AB, respectiv AC.
Să se demonstreze că $\frac{MD}{ME} = \frac{AC}{AB}$.

8. Fie ABC un triunghi oarecare, iar M, N, P mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$.
Să se demonstreze că $S_{ABC} = 4 \cdot S_{MNP}$.

9. Fie ABC un triunghi oarecare, $[AA']$ înălţime, $[BM]$ şi $[CN]$ mediane. Să se demonstreze că $S_{ABC} = 4 \cdot S_{A'MN}$.

10. Să se determine un punct M în planul triunghiului ABC, astfel încât să avem egalităţile: $S_{MAB} = S_{MBC} = S_{MAC}$.

11. Să se împartă un paralelogram în trei părţi de aceeaşi arie prin drepte care pornesc dintr-un vârf al lui.

12. Într-un cerc de rază $R = 4{,}5$ cm se înscrie un triunghi isoscel $ABC(AB = AC)$ a cărui înălţime dusă din A este de 4 cm. Să se calculeze aria triunghiului ABC.

13. Un dreptunghi este înscris într-un cerc de rază R. Ştiind că unghiul făcut de diagonalele dreptunghiului are 60^o, să se calculeze aria dreptunghiului.

14. Să se demonstreze că semiprodusul dintre lungimile diagonalelor unui patrulater convex cu diagonalele perpendiculare este egal cu aria patrulaterului.

15. Fie $ABCD$ un paralelogram. Notăm cu M proiecţia punctului A pe dreapta BC şi cu N proiecţia punctului D pe dreapta AB. Să se demonstreze că $[DN] \equiv [AM]$ dacă şi numai dacă $ABCD$ este romb.

16. În triunghiul oarecare ABC ducem medianele $[BN]$ şi $[CM]$, care se intersectează în punctul P. Să se demonstreze că:

$$S_{AMPN} = S_{BCP} \text{ şi } S_{BPM} = S_{CPN}.$$

17. Fie ABC şi $A'B'C'$ două triunghiuri asemenea astfel încât $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = k$. Să se demonstreze relaţia:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = k^2.$$

18. În triunghiul isoscel $ABC(AB = AC)$ notăm cu h_b lungimea înălţimii corespunzătoare uneia din laturile congruente. Pe dreapta BC se consideră un punct oarecare M. Fie N şi P picioarele perpendicularelor duse din M pe AB, respectiv AC. Să se demonstreze că:

a) dacă $M \in [BC]$, atunci $MN + MP = h_b$;

b) dacă $M \notin [BC]$, atunci $|\, MN - MP \,| = h_b$.

19. Să se demonstreze că suma distanţelor unui punct mobil din interiorul unui triunghi echilateral la laturile acestui triunghi este constantă.

20. Se consideră un triunghi dat ABC şi un punct variabil $M \in (BC)$. Să se arate că între distanţele $x = d(M, AB)$ şi $y = d(M, AC)$ există o relaţie de forma $k \cdot x + i \cdot y = 1$, unde k şi i sunt constante.

21. Fie ABC un triunghi şi $D \in (AB)$ fix. Să se găsească un punct $E \in (AC)$ astfel încât $S_{ADE} = S_{BCED}$.

22. Fie ABC un triunghi oarecare şi $D \in (AB)$, $E \in (BC)$, $F \in (AC)$ astfel încât $[DA] \equiv [DB]$, $EC = 2 \cdot EB$ şi $AF = 3 \cdot FC$.
Să se arate că:

a) $S_{ADEF} = \frac{2}{3} \cdot S_{ABC}$ b) $S_{DEF} < \frac{1}{3} \cdot S_{ABC}$.

23. Se consideră triunghiul ABC şi punctele $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ astfel încât $DE \,||\, BC$. Fie punctul $M \in (BC)$. Să se calculeze aria S_{ADME} în funcţie de ariile $S_1 = S_{ABC}$ şi $S_2 = S_{ADE}$.

24. Prin punctul D luat pe baza $[BC]$ a triunghiului ABC se duc dreptele DE şi DF paralele cu AB şi AC şi intersectând aceste laturi în E şi F. Să se demonstreze relaţia:

$$S_{AEF}^2 = S_{BDF} \cdot S_{CDE}.$$

25. Fie ABC un triunghi de laturi a, b, c. Să se arate că: $S_{ABC} \le \frac{a^2 + b^2}{4}$. Când $S_{ABC} = \frac{a^2 + b^2}{4}$?

26. Notăm cu a, b, c lungimile laturilor unui triunghi oarecare şi cu h_a, h_b, h_c lungimile înălţimilor corespunzătoare acestor laturi. Să se arate că dacă $a < b < c$, atunci $h_a > h_b > h_c$.

27. Fie ABC un triunghi oarecare, A' simetricul lui A față de B, B' simetricul lui B față de C, C' simetricul lui C față de A. Să se demonstreze relația: $S_{A'B'C'} = 7 \cdot S_{ABC}$.

28. Fie $ABCD$ un patrulater convex și A', B', C', D' simetricele lui A, B, C, D respectiv față de B, C, D, A.
Să se demonstreze relația: $S_{A'B'C'D'} = 5 \cdot S_{ABCD}$.

29. Se consideră un pătrat $ABCD$ și punctele E, F, G, H, I, K, L, M care împart laturile $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ în trei segmente congruente. Dreapta GK taie dreptele MI și EH în punctele R și Q, iar dreapta FL taie dreptele MI și EH în S și P. Să se arate că $PQRS$ este pătrat și să se calculeze S_{PQRS} în funcție de S_{ABCD}.

30. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, $AD \perp BC$. Se proiectează punctul D pe AB, AC în E și F și se notează $DE = \alpha$, $DF = \beta$. Să se calculeze aria triunghiului ABC în funcție de α, β.

31. Să se calculeze aria unui trapez care are laturile paralele egale cu 16 și 44 și cele neparalele egale cu 17 și 25.

32. Fie $ABCD$ un trapez, iar M și N mijloacele bazelor $[AB]$ și $[CD]$. Să se demonstreze relația $S_{AMND} = S_{MBCN}$.

33. Fie $ABCD$ un trapez și M un punct pe baza mare AB a trapezului astfel încât $AB = CD + 2 \cdot MB$.
Să se demonstreze relația $S_{AMC} = S_{ACD} + S_{BCM}$.

34. Fie $ABCD$ un trapez. Prin extremitățile bazei mici CD se duc două drepte paralele care întâlnesc baza mare în E și F.
Să se demonstreze relația: $S_{CDEF} = S_{ACD} + S_{BCD}$.

35. Fie $ABCD$ un patrulater convex și O punctul de intersecție al diagonalelor. Să se demonstreze că $AB \parallel CD$ dacă și numai dacă $S_{AOD} = S_{BOC}$.

36. Fie $ABCD$ un trapez cu baza mare $[AB]$, baza mică $[CD]$ şi O punctul de intersecţia al diagonalelor.
Să se demonstreze că: $S_{AOD} > S_{COD}$.

37. Să se calculeze aria trapezului isoscel circumscris unui cerc de rază R, ştiind că unghiurile ascuţite ale trapezului sunt de 60^o.

38. Fie E mijlocul laturii neparalele $[AD]$ a trapezului $ABCD$. Să se arate că $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{BCE}$.

39. În interiorul unui trapez $ABCD$ ale cărui diagonale $[AC], [BD]$ se întâlnesc în O, prin extremităţile bazei mici $[CD]$ se duc două drepte paralele care întâlnesc baza mare în E şi F şi diagonalele $[BD], [AC]$ în G şi H.
Să se demonstreze relaţia: $S_{EGOHF} = S_{AHD} + S_{CGB} + S_{COD}$.

40. Fie $ABCD$ un patrulater convex şi M, N, P, Q mijloacele laturilor $[AB], [BC], [CD], [DA]$. Să se demonstreze relaţia:

$$S_{MNPQ} = S_{AMQ} + S_{BMN} + S_{CNP} + S_{DPQ}.$$

41. Fie $ABCD$ un patrulater convex în care $[AC] \equiv [BD]$, şi M, N, P, Q mijloacele laturilor $[AB], [BC], [CD], [DA]$.
Să se arate că: $S_{ABCD} = MP \cdot NQ$.

42. Se consideră două patrulatere convexe $A_1A_2A_3A_4$ şi $A_1'A_2'A_3'A_4'$. Presupunem că A_1A_2, $A_1'A_2'$ au acelaşi mijloc şi analog A_2A_3, $A_2'A_3'$; A_3A_4, $A_3'A_4'$; A_4A_1, $A_4'A_1'$.
Să se demonstreze că cele două patrulatere au aceeaşi arie.

43. Într-un dreptunghi care are laturile egale cu 3 şi 4 se înscrie un alt dreptunghi cu laturile în raportul 1 : 3.
Să se calculeze aria dreptunghiului înscris.

44. Fie M şi N mijloacele laturilor $[BC]$ respectiv $[AD]$ ale patrulaterului convex $ABCD$, $\{P\} = AM \cap BN$, $\{Q\} = CN \cap \cap DM$. Să se demonstreze relaţia: $S_{MPNQ} = S_{ABP} + S_{CDQ}$.

45. Fie M şi N mijloacele laturilor opuse $[AB]$ şi $[CD]$ ale unui patrulater convex $ABCD$. Să se demonstreze relaţia:

$$S_{ABN} + S_{CDM} = S_{ABCD}.$$

46. Fie $ABCD$ un patrulater şi punctele M, N pe segmentul $[AB]$, astfel încât $AM = MN = NB$, iar P, Q pe segmentul $[CD]$ astfel încât $CP = PQ = QD$. Să se arate că:

$$S_{ABCD} = 3 \cdot S_{MNPQ}.$$

47. Fie $ABCD$ un paralelogram, iar M şi N mijloacele laturilor $[AB]$ şi $[CD]$. Prin M şi N se duc paralele la diagonala $[BD]$. Aceste paralele taie dreptele AN şi CM în P şi Q.

Să se demonstreze că: $S_{ABCD} = 3 \cdot S_{MPNQ}$.

48. Fie M un punct arbitrar luat pe latura $[BC]$ a paralelogramului $ABCD$, N un punct pe $[AM]$.

Să se demonstreze relaţia: $S_{DMN} = S_{BCN}$.

49. Fie O_1, O_2, O_3 centrele pătratelor construite în afară pe laturile $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ ale triunghiului ABC. Dreptele O_1O_2, O_1O_3 întâlnesc latura $[BC]$ în P şi Q. Să se demonstreze relaţia: $S_{O_1PQ} = S_{BO_3Q} + S_{CO_2P}$.

50. Pe laturile $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ ale unui triunghi oarecare se iau punctele A_1, B_1, C_1 astfel încât $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{1}{2}$.

Fie $\{A_2\} = BB_1 \cap CC_1$, $\{B_2\} = AA_1 \cap CC_1$, $\{C_2\} = AA_1 \cap BB_1$.

Să se arate că: $S_{A_2B_2C_2} = S_{AB_2C_1} + S_{BC_2A_1} + S_{CA_2B_1}$.

51. Fie ABC un triunghi echilateral înscris într-un cerc. Să se calculeze raportul între aria triunghiului şi aria cercului.

52. Fie ABC un triunghi echilateral în care se înscrie un cerc. Să se calculeze raportul între aria triunghiului şi aria cercului.

53. Fie $ABCD$ un pătrat înscris într-un cerc. Să se calculeze raportul între aria pătratului şi aria cercului.

54. Fie $ABCD$ un pătrat în care se înscrie un cerc. Să se calculeze raportul între aria pătratului şi aria cercului.

55. Fie un poligon regulat cu n laturi înscris într-un cerc. Să se calculeze raportul între aria poligonului şi aria cercului.

56. Fie un poligon regulat cu n laturi în care se înscrie un cerc. Să se calculeze raportul între aria poligonului şi aria cercului.

57. Într-un triunghi echilateral se înscrie un cerc, iar în cerc este înscris un alt triunghi echilateral. Să se calculeze raportul ariilor celor două triunghiuri.

58. Într-un cerc este înscris un triunghi echilateral, iar în triunghiul echilateral este înscris un alt cerc. Să se calculeze raportul ariilor celor două cercuri.

59. Într-un pătrat este înscris un cerc, iar în cerc este înscris un alt pătrat. Să se determine raportul ariilor celor două pătrate.

60. Într-un cerc este înscris un pătrat şi în pătrat este înscris un alt cerc. Să se determine raportul ariilor celor două cercuri.

61. Într-un poligon regulat cu n laturi este înscris un cerc, iar în cerc un alt poligon regulat cu n laturi. Să se determine raportul ariilor celor două poligoane.

62. Într-un cerc este înscris un poligon regulat cu n laturi şi în poligon este înscris un alt cerc. Să se determine raportul ariilor celor două cercuri.

12. INEGALITĂŢI

1. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare ABC au loc inegalităţile:

$$AB > |BC - CA|,\ BC > |AC - AB|,\ AC > |AB - BC|.$$

2. Un triunghi are laturi de lungime 2 cm şi 5 cm. Ştiind că valoarea în centimetri a celei de-a treia laturi e un număr întreg, să se afle ce lungime poate avea ea.

3. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A şi $AD \perp BC$. Să se demonstreze inegalitatea: $BC \geq 2 \cdot AD$.

4. Fie $ABCD$ un trapez oarecare ($AB \,||\, CD$). Notând: $a = AC$, $b = BD$ şi d înălţimea trapezului, să se demonstreze inegalitatea: $d < \dfrac{a+b}{2}$.

5. Fie ABC un triunghi oarecare, $[AD]$ bisectoarea unghiului $\hat{A}$. Din D se duce $DE \,||\, AB$, $DF \,||\, AC$ şi fie $\{M\} = AD \cap EF$. Să se demonstreze inegalitatea:

$$MB + MC > AB + AC - AD.$$

6. Dacă punctul O este interior triunghiului ABC, să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{BC + CA + AB}{2} < OA + OB + OC < BC + CA + AB.$$

7. Să se demonstreze că dacă M, N, P se află pe laturile $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ ale triunghiului ABC, şi nu pe prelungiri, are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{2} \cdot (BC + CA + AB) < AM + BN + CP < \frac{3}{2} \cdot (BC + CA + AB).$$

8. Să se demonstreze că o înălţime a unui triunghi este mai mică decât semisuma laturilor care pleacă din acelaşi vârf.

9. Să se demonstreze că o mediană a unui triunghi este mai mică decât semisuma laturilor care pleacă din același vârf.

10. Să se demonstreze că suma medianelor unui triunghi este mai mică decât perimetrul triunghiului, dar este mai mare decât jumătatea lui.

11. Fie $ABCD$ un patrulater convex, $\{O\} = AC \cap BD$, iar M, N, P, Q mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$.

Să se demonstreze că:

a) $OM + ON + OP + OQ < AC + BD$;

b) $MP + NQ < AC + BD$.

12. Fie $ABCD$ un patrulater oarecare cu $[AB]$ cea mai mare latură. Să se demonstreze inegalitatea: $AB < BC + CD + DA$.

13. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Să se demonstreze că:

$$AC + BD > AB + CD.$$

14. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Să se demonstreze inegalitatea: $AC + BD > \frac{AB + BC + CD + DA}{2}$.

15. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Să se demonstreze inegalitatea: $AC + BD < AB + BC + CD + DA$.

16. Fie $ABCD$ un patrulater convex, iar M și N mijloacele laturilor $[AB]$ și $[CD]$. Să se demonstreze inegalitatea:

$$2 \cdot MN < BC + AD.$$

17. Fie $ABCD$ un patrulater convex și M, N, P, Q mijloacele laturilor sale. Să se demonstreze inegalitatea:

$$MP + NQ < \frac{AB + BC + CD + DA}{2}.$$

18. Fie $ABCDEF$ un hexagon oarecare și M, N, P, Q, R, S mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$, $[EF]$, $[FA]$.

Să se demonstreze inegalitatea:
$2 \cdot RN + 2 \cdot MQ + 2 \cdot PS < AE + AC + BD + BF + CE + DF$.

19. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și $AD \perp BC$.
Să se demonstreze inegalitatea: $AD > AB + AC - BC$.

20. Fie $ABCD$ un romb de latură l și diagonale d_1 și d_2. Notând cu d înălțimea rombului, să se demonstreze că: $d + 2 \cdot l > d_1 + d_2$.

21. Fie $ABCD$ un patrulater cu diagonalele perpendiculare și care se intersectează în O. Ducem $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp CD$, $OQ \perp AD$. Să se demonstreze inegalitatea:
$OM + ON + OP + OQ > (AC + BD) - (AB + BC + CD + DA)$.

22. Fie $[AD]$ cea mai lungă și $[BC]$ cea mai scurtă latură a patrulaterului $ABCD$. Să se arate că:
$m(A\hat{B}C) > m(A\hat{D}C)$ și $m(B\hat{C}D) > m(B\hat{A}D)$.

23. Fie $ABCD$ un patrulater convex astfel încât $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) < 90^o$. Să se demonstreze inegalitatea:
$$AC + BD > BC + CD + DA.$$

24. Medianele corespunzătoare laturilor $[BC]$ și $[AC]$ ale triunghiului ABC sunt perpendiculare. Să se demonstreze inegalitatea: $\frac{1}{2} < \frac{BC}{AC} < 2$.

25. Se consideră un trapez isoscel circumscris unui cerc de rază r. Să se demonstreze că $d_1^2 > 8r^2$, unde d_1 este lungimea diagonalelor trapezului.

26. În interiorul unui cerc de centru O și rază r se ia un punct P prin care se duc două coarde perpendiculare $[AB]$ și $[CD]$.
Să se demonstreze inegalitatea: $AB \cdot CD \leq 2 \cdot (2r^2 - OP^2)$.

27. În triunghiul oarecare ABC, bisectoarea $[BE]$ și $[CF]$ taie mediana $[AD]$ în punctele M și N. Să se demonstreze

inegalitatea: $\frac{AM}{MD}+\frac{AN}{ND}>2$.

28. Bisectoarele unghiurilor $B\hat{A}C$ şi $C\hat{A}D$ ale paralelogramului $ABCD$ intersectează laturile $[BC]$ şi $[CD]$ în M respectiv N. Să se demonstreze inegalitatea: $\frac{MB}{MC}+\frac{ND}{NC}>1$.

29. Fie $ABCD$ un paralelogram. Să se demonstreze că:

$$\frac{AC^2+BD^2}{AC+BD}<AB+BC.$$

30. Fie M un punct oarecare situat pe bisectoarea unghiului exterior C al triunghiului ABC. Să se demonstreze inegalitatea:

$$MA+MB>AC+BC.$$

31. În triunghiul ABC se consideră bisectoarea unghiului $\hat{C}$ care intersectează latura $[AB]$ în D.

Să se demonstreze că: $CD<\sqrt{AC\cdot BC}$.

32. Se consideră un triunghi echilateral ABC şi fie M un punct oarecare în plan ce nu aparţine cercului circumscris triunghiului. Atunci distanţele MA, MB, MC reprezintă lungimile laturilor unui triunghi (Teorema Pompeiu).

33. Fie m_a lungimea medianei din vârful A al triunghiului ABC cu laturile a, b, c. Să se demonstreze inegalitatea:

$$bc-\frac{a^2}{4}\le m_a^2\le bc+\frac{a^2}{4}.$$

13. PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Se consideră un segment $[AB]$, de lungime $AB = a$ cm. Fie A_1 mijlocul segmentului $[AB]$, A_2 mijlocul segmentului $[AA_1]$, şi procedeul se repetă de n ori, obţinând în final punctul A_n, ca fiind mijlocul segmentului $[AA_{n-1}]$.

Determinaţi lungimile AA_i, $1 \leq i \leq n$.

2. a) Care este măsura unghiului parcurs de secundarul unui ceas într-o secundă ?

b) Care este măsura unghiului parcurs de minutarul unui ceas într-o secundă ?

c) Care este măsura unghiului parcurs de orarul unui ceas într-o secundă ?

3. Din punctul O ducem semidreptele $[OO_1, [OO_2, \cdots, [OO_{2n}, (n \geq 2)$, în această ordine, care formează în jurul lui O $2n$ unghiuri congruente.

a) Să se demonstreze că semidreapta $[OO_1$ este prelungirea semidreptei $[OO_{n+1}$.

b) Să se demonstreze că semidreapta $[OO_i$ este prelungirea semidreptei $[OO_{n+i}$.

4. Din punctul O ducem semidreptele $[OO_1, [OO_2, \cdots, [OO_{2n+1}, (n \geq 1)$, în această ordine, care formează în jurul lui O $2n + 1$ unghiuri congruente.

a) Să se demonstreze că prelungirea semidreptei $[OO_1$ este bisectoarea unghiului $O_{n+1}\hat{O}O_{n+2}$.

b) Să se demonstreze că prelungirea semidreptei $[OO_i$ este bisectoarea unghiului $O_{n+i}\hat{O}O_{n+i+1}$, pentru i cuprins între 2 şi $n + 1$ ($O_{2n+1+j} = O_j$ $(\forall)\, j \in N^*$).

5. Fie triunghiul ABC şi $D = pr_{BC} A$.

a) Dacă $m(\hat{C}) < 90^o$, atunci $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \cdot CB \cdot CD$.

b) Dacă $m(\hat{C}) > 90^o$, atunci $AB^2 = CA^2 + CB^2 + 2 \cdot CB \cdot CD$.

(Teorema lui Pitagora generalizată)

6. Dacă A, B, C sunt trei puncte coliniare cu $B \in (AC)$ şi O un punct axterior dreptei AC, atunci are loc relaţia:

$$OA^2 \cdot BC - OB^2 \cdot AC + OC^2 \cdot AB = AB \cdot BC \cdot AC.$$

(Relaţia lui Stewart)

7. Fie ABC un triunghi şi A' mijlocul lui $[BC]$; se notează $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $m_a = AA'$. Atunci are loc relaţia:

$$m_a^2 = \frac{2 \cdot (b^2 + c^2) - a^2}{4}.$$

(Teorema medianei)

8. Fie triunghiul lui ABC cu $m(\hat{A}) = 90^o$, atunci pentru orice $M \in (BC)$, are loc relaţia lui Van Aubel :

$$AB^2 \cdot MC^2 + AC^2 \cdot MB^2 = BC^2 \cdot MA^2.$$

(Teorema lui Van Aubel)

9. Fie triunghiul ABC. Dacă există $M \in (BC)$ astfel încât $AB^2 \cdot MC^2 + AC^2 \cdot MB^2 = BC^2 \cdot MA^2$, atunci $m(\hat{A}) = 90^o$.

(Reciproca teoremei lui Van Aubel)

10. Se consideră un triunghi ABC în care unghiul format de bisectoarea $[AA']$ cu latura $[AB]$ este egal cu unghiul format de înălţimea $[CD]$ cu $[AC]$. Să se demonstreze că:

a) $3 \cdot AC^2 = 4 \cdot CD^2$; b) $AB^2 + AC^2 = BC^2 + AB \cdot AC$.

11. Fie (AC) cea mai lungă dintre diagonalele paralelogramului $ABCD$ şi E, F picioarele perpendicularelor din C pe AB şi AD. Să se arate că : $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$.

12. Se consideră un triunghi isoscel ABC ($AB = AC$) şi un punct $M \in BC - [BC]$. Să se demonstreze relaţia:

$$AM^2 - AB^2 = MB \cdot MC.$$

13. Fie $ABCD$ un dreptunghi. Să se demonstreze că pentru orice punct M este verificată relaţia:

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2.$$

14. Fie $ABCD$ un patrulater oarecare şi E, F mijloacele diagonalelor $[AC]$ şi $[BD]$. Să se demonstreze relaţia:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4 \cdot EF^2.$$

15. Fie ABC un triunghi şi A', B', C' trei puncte coliniare distincte, astfel încât $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$. Să se arate că : $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$. (Teorema lui Menelaus)

16. Se consideră punctele A', B', C' situate pe dreptele BC, CA, AB determinate de laturile triunghiului ABC. Dacă două dintre ele sunt situate pe laturile triunghiului şi unul pe prelungirea unei laturi, sau toate trei sunt pe prelungirile de laturi şi este îndeplinită relaţia: $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$, atunci cele trei puncte sunt coliniare.

(Reciproca Teoremei lui Menelaus)

17. Se consideră un triunghi ABC şi trei drepte concurente AM, BM, CM care intersectează suporturile laturilor triunghiului în punctele A', B', C'. Să se demonstreze relaţia:
$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$ (Teorema lui Ceva).

18. Fie A', B', C' trei puncte situate pe laturile (BC), (AC), (AB) ale triunghiului ABC. Să se demonstreze că dacă este verificată relaţia $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$, atunci dreptele AA', BB', CC' sunt concurente.

(Reciproca Teoremei lui Ceva)

19. Fie $ABCD$ un trapez ($AB \parallel CD$). Pe latura $[BC]$ se ia un punct oarecare M. Dreptele AM şi DM intersectează prelungirile laturilor $[CD]$ şi $[AB]$ în P şi respectiv Q.

Să se demonstreze că $BQ \cdot CP$ = constant.

20. Fie E un punct pe baza $[AB]$ a trapezului $ABCD$. Drep-

tele EC şi ED intersectează diagonalele $[BD]$ şi $[AC]$ respectiv în M şi N. Să se demonstreze că $\frac{MB}{MD} + \frac{NA}{NC}$ = constant.

21. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic cu unghiurile drepte în A şi B, iar O intersecţia diagonalelor. Paralela dusă prin O la baze intersectează latura $[AB]$ în E. Să se demonstreze că $[EO$ este bisectoarea unghiului $D\hat{E}C$.

22. Fie $ABCD$ un dreptunghi. Printr-un punct oarecare O al diagonalei $[BD]$ se duc paralelele la laturi. Fie M, N, P, Q intersecţiile lor cu laturile dreptunghiului, astfel încât $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $P \in [CD]$, $Q \in [DA]$. Să se arate că:

a) $MNPQ$ este trapez. Ce se întâmplă când O este mijlocul lui $[BD]$.

b) $MN + PQ = AC$.

23. Fie $ABCD$ un patrulater convex şi O intersecţia diagonalelor lui. Dacă M şi N sunt mijloacele segmentelor $[AB]$, respectiv $[CD]$, să se demonstreze că M, O, N sunt coliniare dacă şi numai dacă $AB \parallel CD$.

24. Fie D şi E proiecţiile ortocentrului H al triunghiului oarecare ABC respectiv pe bisectoarea interioară a unghiului $\hat{A}$, iar M mijlocul laturii $[BC]$. Să se demonstreze că punctele D, E, M sunt coliniare.

25. Se ia un punct M pe cercul circumscris unui triunghi oarecare ABC. Să se arate că proiecţiile P, Q, R ale punctului M pe BC, CA, AB sunt trei puncte situate pe o dreaptă numită „ dreapta lui Simson ".

26. Se consideră triunghiul ABC şi H ortocentrul său. Se duce înălţimea $[AA']$ şi se construieşte punctul D care este simetricul ortocentrului H în raport cu A'. Ştiind că punctul D se proiectează pe laturile AB şi AC în E şi F, să se demonstreze că punctele E, A' şi F sunt coliniare.

27. Fie cercul $C(O, r)$ şi M un punct în interiorul cercului. Atunci pentru orice coardă (AB) care conţine punctul M, produsul $AM \cdot BM$ este constant şi egal cu $R^2 - OM^2$ (Puterea punctului M faşă de cerc se notează cu $\rho(M)$ şi este egală cu $R^2 - OM^2$).

28. Fie cercul $C(O, r)$ şi M un punct în exteriorul cercului. Atunci pentru orice secantă AB ($A, B \in C(O, r)$) care conţine punctul M, produsul $AM \cdot BM$ este constant şi egal cu $OM^2 - R^2$, deci şi cu pătratul tangentei duse din M la cerc. ($\rho(M) = OM^2 - R^2$). Dacă $M \in C(O, r)$, avem $\rho(M) = 0$.

29. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil şi O intersecţia diagonalelor. Să se demonstreze relaţia:

$$AC^2 + OB^2 + OD^2 = BD^2 + OA^2 + OC^2.$$

30. Într-un semicerc de diametru AB se înscrie un patrulater oarecare $ABCD$. Fie P un punct arbitrar pe $[CD]$ şi Q proiecţia sa pe AB. Să se demonstreze relaţia: $QA \cdot QB - PC \cdot PD = PQ^2$.

31. Fiind date punctele A, C şi $B \in (AC)$, ducem tangenta CT la cercul de diametru (AB). Cercul de centru C şi rază (CT) intersectează pe AB în M şi N. Să se arate că avem relaţia:

$$AM \cdot AN = AB \cdot AC.$$

32. Se consideră triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) şi un punct mobil pe BC. Cercurile circumscrise triunghiurilor AMB, AMC intersectează laturile AC, AB a doua oară în punctele N, P. Să se demonstreze că suma $BP + CN$ este constantă.

33. Fie ABC un triunghi oarecare şi $A_1 \in (BC)$. Cercurile circumscrise triunghiurilor AA_1B şi AA_1C intersectează din nou pe AC şi AB în N şi M. Să se demonstreze că $BM = CN$ dacă şi numai dacă $[AA_1]$ este bisectoare.

34. Un cerc întâlneşte laturile $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ ale triunghiului ABC în M, M', N, N', P, P'. Să se demonstreze că dacă dreptele AM, BN, CP sunt concurente, atunci şi dreptele AM', BN', CP' sunt concurente.

35. Fie $ABCD$ un patrulater convex oarecare. Să se demonstreze că $ABCD$ este inscriptibil dacă şi numai dacă $AC \cdot BD = BC \cdot AD + AB \cdot CD$.

36. Fie $ABCDE$ un pentagon regulat. Să se demonstreze că: $AC^2 - AB^2 = AB \cdot AD$.

37. Fie $ABCDE$ un pentagon regulat şi M un punct oarecare situat pe arcul mic AB al cercului circumscris. Să se demonstreze relaţia: $MC \cdot (MA + MD) = ME \cdot (MB + MD)$.

38. Să se calculeze unghiul format de două bisectoare ale unghiurilor opuse ale unui patrulater oarecare, în funcţie de unghiurile patrulaterului.

39. Să se demonstreze că dacă un patrulater convex are două unghiuri opuse congruente, bisectoarele celorlalte două unghiuri sunt paralele şi reciproc, dacă bisectoarele a două unghiuri opuse sunt paralele, celelalte două unghiuri opuse sunt congruente.

40. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A şi neisoscel şi $[AM]$ mediana lui. Se duce $BB' \perp AM (B' \in AM)$. Se prelungeşte segmentul $[BB']$ dincolo de B' cu $[B'D] \equiv [BB']$. Să se demonstreze că A, M, C şi D sunt vârfurile unui trapez. În ce caz acest trapez este isoscel ?

41. Pe laturile $[AB]$ şi $[AC]$ ale triunghiului ABC se construiesc în afară pătratele $ABDE$ şi $ACFG$. Fie $[AM]$ şi $[AD]$ mediana respectiv înălţimea ce pleacă din A a triunghiului ABC. Să se arate că:

a) $EG \perp AM$ şi $EG = 2 \cdot AM$.

b) al patrulea vârf I al paralelogramului, care are două vârfuri opuse în E şi G şi al treilea în A se află pe dreapta AD.

c) dreptele CD şi BF sunt perpendiculare pe BI, respectiv CI şi $[CD] \equiv [BI]$, $[BF] \equiv [CI]$. De asemenea dreptele CD şi BF se intersectează pe dreapta AD.

42. Fie $ABCD$ un paralelogram şi O punctul de intersecţie al diagonalelor $[AC]$ şi $[BD]$. Să se demonstreze că orice dreaptă care trece prin O împarte paralelogramul în două poligoane de arii egale.

43. Fie $ABCD$ un patrulater convex şi $\{O\} = AC \cap BD$. Să se demonstreze că $AB \parallel CD$ dacă şi numai dacă are loc relaţia $S^2_{AOD} = S_{AOB} \cdot S_{COD}$.

44. Fie ABC un triunghi oarecare, M un punct în interiorul triunghiului. Notăm $\{A_1\} = AM \cap BC$, $\{B_1\} = BM \cap DC$, $\{C_1\} = CM \cap AB$, $S_1 = S_{MAC_1}$, $S_2 = S_{MBC_1}$, $S_3 = S_{MBA_1}$, $S_4 = S_{MCA_1}$, $S_5 = S_{MCB_1}$, $S_6 = S_{MAB_1}$. Să se arate că:

$$S_1 \cdot S_3 \cdot S_5 = S_2 \cdot S_4 \cdot S_6 .$$

45. Aria unui triunghi ABC este dată de formula

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

unde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. (Formula lui Heron).

GEOMETRIE ÎN SPAŢIU

1. RELAŢII ÎNTRE PUNCTE, DREPTE ŞI PLANE. PARALELISM. PERPENDICULARITATE

1. Fie d o dreaptă şi A, B două puncte exterioare dreptei d. Să se stabilească câte plane distincte pot fi determinate de cele 2 puncte şi de dreaptă.

2. Fie d_1, d_2 două drepte paralele şi A, B două puncte exterioare dreptelor. Să se stabilească câte plane distincte pot fi determinate de cele două drepte şi cele două puncte.

3. Se consideră două drepte concurente d_1 şi d_2 într-un plan α. Să se găsească un punct M în planul α egal depărtat de dreptele d_1 şi d_2 şi care să aparţină şi unui alt plan β.

4. Se consideră trei puncte A, B, $C \in \alpha$ necoliniare şi un plan β. Să se determine un punct $M \in \alpha \cap \beta$ astfel încât $MA = MB = MC$.

5. Se consideră două puncte A, $B \in \alpha$ şi un plan β. Să se determine punctele $M \in \beta$ astfel încât $m(\hat{AMB}) = 90^\circ$.

6. Se consideră două puncte A, $B \in \alpha$ şi un plan β. Să se determine punctele $M \in \alpha \cap \beta$ astfel încât $S_{AMB} = k =$ constant.

7. Se consideră două puncte B, $C \in \alpha$, o dreaptă d neinclusă în planul α şi un punct A, $A \notin d$, $A \notin \alpha$. Să se determine în planul α un punct M astfel încât $MB = MC$ şi $MA \cap d \neq \emptyset$.

8. Se consideră dreptele necoplanare d_1, d_2, d_3 distincte astfel încât oricare două dintre ele să se intersecteze.
Să se demonstreze că cele trei drepte sunt concurente.

9. Fie d o dreaptă şi $A \notin d$ un punct. Să se determine un plan ce trece prin A şi este paralel cu dreapta d.

10. Fie d_1 şi d_2 două drepte în spaţiu distincte şi necoplanare. Să se determine un plan α astfel încât $d_1 \subseteq \alpha$ şi $d_2 \,||\, \alpha$.

11. Fie d_1 şi d_2 două drepte în spaţiu distincte şi necoplanare şi un punct A, $A \notin d_1$, $A \notin d_2$. Să se determine un plan ce trece prin A şi este paralel atât cu d_1 cât şi cu d_2.

12. Fie d_1 şi d_2 două drepte în spaţiu distincte şi necoplanare, iar A un punct, $A \notin d_1$, $A \notin d_2$. Să se determine un plan α astfel încât $d_1 \cap \alpha \neq \emptyset$, $d_2 \,||\, \alpha$.

13. Fie α un plan şi d, d' două drepte, $d \,||\, d'$, d şi d' neincluse în α şi $d \,||\, \alpha$.
Să se demonstreze că $d' \,||\, \alpha$.

14. Fie $ABCD$ şi $ABEF$ două paralelograme situate în plane diferite. Să se demonstreze că $CD \,||\, (ABEF)$.

15. Fie $ABCD$ un paralelogram şi α un plan astfel încât $A, B, C, D \notin \alpha$, $AB \,||\, \alpha$.
Să se demonstreze că $CD \,||\, \alpha$.

16. Fie $ABCD$ un paralelogram, O intersecţia diagonalelor sale, M un punct exterior planului (ABC) şi N mijlocul segmentului (AM). Să se demonstreze că: $CM \,||\, (BND)$.

17. Fie $ABCD$ şi $ABEF$ două dreptunghiuri situate în plane diferite. Să se demonstreze că:
a) Triunghiurile ACF şi BDE sunt congruente.
b) Patrulaterul $CDFE$ este paralelogram.

18. Fie $ABCD$ un paralelogram, $\{O\} = AC \cap BD$, M un punct arbitrar în spaţiu, N mijlocul lui (MB) şi P mijlocul lui (MC). Să se arate că planele (ADM) şi (ONP) sunt paralele.

19. Fie $ABCD$ un dreptunghi, $\{O\} = AC \cap BD$, M un punct arbitrar în spaţiu, N mijlocul lui (MB) şi P mijlocul lui (AB).

Să se demonstreze că $(AMD) \parallel (PNO)$.

20. Fie α, β două plane paralele. În planul α considerăm triunghiul ABC şi în planul β triunghiul DEF astfel încât $AD \parallel BE \parallel CF$.

Să se demonstreze că triunghiurile ABC şi DEF sunt congruente.

21. Fie α, β două plane paralele şi ABC un triunghi inclus în planul α şi M un punct în spaţiu $M \notin \alpha$, $M \notin \beta$. Dreptele MA, MB, MC intersectează planul β în punctele A_1, B_1, C_1.

Să se arate că:

a) Dacă triunghiul ABC este echilateral atunci şi triunghiul $A_1B_1C_1$ este echilateral.

b) Dacă triunghiul ABC este dreptunghic atunci şi triunghiul $A_1B_1C_1$ este dreptunghic.

22. Fie α, β două plane paralele şi d o dreaptă care intersectează planul α într-un singur punct.

Să se demonstreze că dreapta d intersectează planul β tot într-un punct.

23. Fie α, β două plane paralele. În α considerăm pătratul $ABCD$. Ducem prin A, B, C, D dreptele paralele d_1, d_2, d_3, d_4 care intersectează planul β în M, N, P şi respectiv Q.

Să se demonstreze că patrulaterul $MNPQ$ este pătrat.

24. Fie $ABCD$ un paralelogram. Construim în spaţiu paralelogramele $ABEF$ şi $CDGH$.

Să se demonstreze că punctele E, F, G, H sunt coplanare.

25. Fie $VABCDEF$ o piramidă hexagonală regulată, astfel încât muchia laterală să fie dublul laturii bazei. Fie K mijlocul

muchiei $[AV]$ şi $L \in VB$, $M \in VF$ astfel încât $KL \perp AV$ şi $KM \perp AV$.

Să se demonstreze că punctele K, L, D, M sunt coplanare.

26. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub şi fie punctele E, F, G, H, I, J mijloacele muchiilor $[AB], [BB'], [B'C'], [C'D'], [DD'], [AD]$. Să se arate că punctele E, F, G, H, I, J sunt coplanare.

27. Fie $SABCD$ o piramidă cu baza dreptunghiul $ABCD$ şi $SA \perp (ABCD)$. Considerăm punctele $M \in |SB|$, $N \in |SC|$, şi $P \in |SD|$ astfel încât $AM \perp SB$, $AN \perp SC$ şi $AP \perp SD$.

Să se arate că punctele A, M, N, P sunt coplanare.

28. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub şi $E \in AC$ astfel încât $EC = 2AE$, $F \in AD'$ astfel încât $FD' = 2AF$, $G \in BD$ astfel încât $BG = 2GD$, $H \in BD'$ astfel încât $BH = 2D'H$.

Să se demonstreze că:

a) $EF \| (ABB'A')$; b) $EG \| (A'B'C'D')$;

c) $GH \| (BCC'B')$.

29. Fie $ABCD$ o piramidă triunghiulară regulată şi M, N, P, Q, R mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA, AC.

Să se demonstreze că:

a) $MN \| (ACD)$; $PQ \| (ABC)$; $NP \| (ABD)$;

b) $RP \| (ABD)$; $MQ \| (BCD)$; $NR \| (ABD)$.

30. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată şi M, N, P, Q, R, S mijloacele segmentelor $[AB], [AD], [AV], [MN], [VC], [VB]$. Să se demonstreze că:

a) $MN \| (VBD)$; $PQ \| (VBD)$; $RS \| (VAD)$;

b) $(MNP) \| (VBD)$.

31. Fie $VABCDEF$ o piramidă hexagonală regulată şi M, N, P, Q, R mijloacele segmentelor $[AB], [AF], [VB], [VF], [VC]$. Să se demonstreze că:

a) $MN \| (VBF)$; $PQ \| (VCF)$;

b) $MP \| (VAF)$; $PR \| (VEF)$.

32. Fie $ABCD$ un romb şi M un punct arbitrar pe perpendiculara d în A pe planul rombului. Dacă N este mijlocul segmentului (CM) şi O intersecţia diagonalelor rombului, să se demonstreze că:
a) $MA \| \| (BDN)$; b) $BD \perp (MAC)$.

33. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare şi G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor BCD, ADC şi respectiv ABD. Să se demonstreze că $(G_1G_2G_3) \| \| (ABC)$.

34. Fie α şi β două plane care se intersectează după dreapta c şi a, b două drepte, $a \subset \alpha$, $a \| \| \beta$, $b \subset \beta$, $b \| \| \alpha$.
Să se demonstreze că $a \| \| b$.

35. Să se secţioneze un tetraedru $ABCD$ printr-un plan astfel încât secţiunea să fie paralelogram.

36. Să se secţioneze un tetraedru $ABCD$ printr-un plan astfel încât secţiunea să fie romb.

37. Să se secţioneze un tetraedru $ABCD$ printr-un plan astfel încât secţiunea să fie un dreptunghi.

38. Să se secţioneze un tetraedru $ABCD$ printr-un plan astfel încât secţiunea să fie un pătrat.

39. Fie O, A, B, C patru puncte astfel încât $OA \perp OB \perp OC \perp OA$ şi $OA = OB = OC$. şi D, E, F, G, H mijloacele segmentelor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, $[OF]$, $[DE]$.
Să se demonstreze că:
a) $EF \| \| (OBC)$; b) $DE \perp (COF)$; c) $GH \perp FO$.

40. Fie A, B, C, D patru puncte în spaţiu astfel încât $AB = AC$. Notăm cu M şi respectiv N punctele de intersecţie ale bisectoarelor unghiurilor $B\hat{A}D$ şi $D\hat{A}C$ cu muchiile (BD) şi (DC).
Să se demonstreze că dreapta MN este paralelă cu planul (ABC).

41. Se dau trei plane paralele p, q, r şi punctele $A, B \in p$, $C, D \in q$. Dreptele AC, BC, BD, AD întâlnesc planul r în punctele E, F, G, H.
a) Să se demonstreze că $EFGH$ este paralelogram. Notând cu d_1 şi d_2 distanţele dintre planele p, r respectiv r, q, ce relaţie trebuie să existe între AB, CD, d_1, d_2 pentru ca paralelogramul să devină dreptunghi, romb, pătrat.

42. Fie A, B, C, D patru puncte în spaţiu. Notăm cu E şi F proiecţiile vârfului A pe bisectoarele unghiurilor $A\hat{B}C$ şi respectiv $A\hat{B}D$. Să se demonstreze că dreptele ME şi MF sunt paralele cu planul (BCD), unde N este mijlocul lui (AB).

43. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat, $DH \perp (ABC)$, iar E mijlocul segmentului (DH).
Să se arate că: $AE \perp BE$, $BE \perp CE$, $CE \perp AE$.

44. Pe muchiile (AB), (BC), (CD), (DA) ale tetraedrului regulat $ABCD$ se iau punctele M, N, P şi respectiv Q astfel încât să avem $AM = BN = CP = DQ$. Notăm cu O mijlocul segmentului (NQ).
Să se demonstreze că planul (MOP) este perpendicular pe NQ.

45. Se consideră o piramidă triunghiulară regulată $ABCD$ cu baza BCD. Pe muchia (AB) se ia un punct M astfel încât $AB = 4 \cdot AM$ şi se notează cu N mijlocul muchiei (CD).
Să se demonstreze că MN trece prin mijlocul înălţimii AO a piramidei.

46. Fie $ABCD$ o piramidă astfel încât $AB = AC = AD = a$, $AB \perp AC$, $AC \perp AD$, $AD \perp AB$. Un plan perpendicular pe planul ABC secţionează piramida după un pătrat.
Să se calculeze aria pătratului.

47. Fie A,B,C,D patru puncte necoplanare astfel încât $AB \perp CD$. Să se demonstreze relaţia:

$$CA^2 + BD^2 = CB^2 + DA^2.$$

48. Fie $VABCD$ o piramidă cu baza $ABCD$ un dreptunghi. Să se demonstreze relația $VA^2 + VC^2 = VB^2 + VD^2$.

49. Se consideră tetraedrul $ABCD$. Fie a, b, c, d lungimile înălțimilor tetraedrului din vârfurile A, B, C, D. Dacă O este un punct oarecare, interior tetraedrului și $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sunt distanțele punctului O la fețele BCD, CDA, DBA, ABC să se arate că are loc relația:

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} = 1 .$$

50. Fie $ABCD$ o piramidă triunghiulară oarecare. Un plan α intersectează laturile (AB), (BC), (CD), (DA) în punctele L, M, N, P.

Să se demonstreze relația:

$$AL \cdot BM \cdot CN \cdot DP = BL \cdot CM \cdot DN \cdot AP.$$

51. Fie α și β două plane paralele și două drepte perpendiculare d_1 și d_2, dreapta d_1 intersectează planul α în A și planul β în D, iar dreapta d_2 intersectează planul α în B și planul β în C.

Să se demonstreze relația: $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$.

52. Fie ABC și $A'B'C'$ două triunghiuri situate în plane diferite astfel încât $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ și G, G' centrele de greutate ale triunghiurilor ABC și respectiv $A'B'C'$.

Să se arate că :

a) $GG' \parallel (AA'B)$;

b) $GG' = \dfrac{AA' + BB' + CC'}{3}$.

2. PROIECŢII ORTOGONALE PE UN PLAN. PLANE PERPENDICULARE. UNGHI DIEDRU

1. Fie α şi β două plane distincte, a căror intersecţie este dreapta d. Considerăm în spaţiu un punct M astfel încât $M \notin \alpha$, $M \notin \beta$. Dacă punctele M_1 şi M_2 sunt proiecţiile punctului M pe planele α şi β, să se arate că $d \perp (MM_1M_2)$.

2. Fie ABC un triunghi echilateral şi d perpendiculara ridicată în A pe planul (ABC). Să se demonstreze că oricare ar fi $M \in d$ avem $MD \perp BC$, unde D este mijlocul laturii (BC).

3. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A şi M un punct arbitrar pe perpendiculara în B pe planul (ABC). Ducem $BE \perp MA$. Să se demonstreze că:

a) $MA \perp AC$; b) $AC \perp BE$.

4. Fie ABC un triunghi oarecare, $AA' \perp BC$ şi $O \in (AA')$. Dacă M este un punct arbitrar pe perpendiculara în O pe planul (ABC), să se demonstreze că $MA \perp BC$.

5. Fie ABC un triunghi oarecare, H ortocentrul triunghiului şi $DH \perp (ABC)$. Să se demonstreze că:

a) $DA \perp BC$; b) $DB \perp AC$; c) $DC \perp AB$.

6. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = AC$), D mijlocul lui (BC) şi M un punct arbitrar pe perpendiculara în C pe planul (ABC) şi E mijlocul lui (MB). Să se demonstreze că:

a) $MD \perp AD$; b) $AC \perp ED$; c) $BC \perp AE$.

7. Fie $ABCD$ un dreptunghi şi d o dreaptă perpendiculară în A pe planul $(ABCD)$.

Să se demonstreze că oricare ar fi $M \in d$ avem:

a) $MB \perp BC$; b) $MD \perp CD$; c) $MA \perp CD$.

8. Fie $ABCD$ un pătrat, $\{O\} = AC \cap BD$ şi d o dreaptă perpendiculară în A pe planul $(ABCD)$. Să se demonstreze că

oricare ar fi $M \in d$ avem:
a) $MB \perp BC$; b) $MD \perp CD$;
c) $MO \perp BD$; d) $(MAC) \perp (MBD)$.

9. Fie $ABCD$ un romb, $\{O\} = AC \cap BD$ şi d o dreaptă perpendiculară în A pe planul $(ABCD)$.
a) Să se demonstreze că oricare ar fi $M \in d$ avem: $MO \perp BD$.
b) Dacă $MA = \frac{AC}{2}$, să se calculeze unghiul diedru făcut de planele (MBD) şi (ABC).

10. Fie $(ABCDEF)$ un hexagon regulat şi d perpendiculara în A pe planul $(ABCDEF)$ şi $\{G\} = AC \cap BE$.
Să se demonstreze că oricare ar fi $M \in d$ avem:
a) $ME \perp ED$; b) $MC \perp DC$; c) $MG \perp BE$.

11. Se dau punctele necoplanare A, B, C, D astfel încât $AB \perp BD$ şi $AC \perp CD$. Dacă M este punctul diametral opus lui D în cercul circumscris triunghiului BCD, să se demonstreze că $AM \perp (BCD)$.

12. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub, $\{O\} = AC \cap BD$.
Să se demonstreze că:
a) $A'O \perp DB$; b) $B'O \perp AC$; c) $AB' \perp AD$.

13. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic, $\{O\} = AC \cap BD$. Să se demonstreze că:
a) $A'O \perp DB$; b) $B'O \perp AC$; c) $AB' \perp BC$.

14. Fie $ABCD$ un pătrat şi E, F, G, H mijloacele laturilor (AB), (BC), (CD) şi respectiv (DA). Pe perpendiculara în G pe planul pătratului considerăm un punct arbitrar M.
Să se demonstreze că:
a) $EF \perp (MGF)$; b) $FG \perp (MHG)$; c) $HF \perp (MEG)$.

15. Fie $ABCD$ un dreptunghi, M un punct pe perpendiculara în A pe planul dreptunghiului şi E, F proiecţiile lui A pe MB şi

respectiv MD.

Să se arate că $AE \perp (MBC)$ și $AF \perp (MCD)$.

16. Fie $ABCD$ un tetraedru astfe încât $AB = AC = AD$ și M, N, P respectiv mijloacele muchiilor (BC), (CD), (DB).

Dacă $AM \perp AN$, atunci $AP \perp AM$ și $AP \perp AN$.

17. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare astfel încât să aibă loc relațiile $AC = AD$ și $BC = BD$.

Să se demonstreze că $AB \perp CD$.

18. Se consideră în spațiu patru puncte necoplanare A, B, C, D astfel încât $AB = BC = CD = DA$ și fie M mijlocul lui (BD), N mijlocul lui (AC).

Să se demonstreze că $MN \perp AC$ și $MN \perp BD$.

19. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat.

Să se demonstreze că: $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$.

20. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare, astfel încât $AB \perp CD$ și $BC \perp AD$.

Să se demonstreze că $AC \perp BD$.

21. Se consideră dreptele a, b, c incluse în planul α și paralele și O un punct exterior planului α. Ducem $OA \perp a$, $OB \perp b$ și $OC \perp c$.

Să se arate că dreptele OA, OB, OC sunt coplanare.

22. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat, $DH \perp (ABC)$, iar E mijlocul segmentului $[DH]$.

Să se demonstreze că $AE \perp (BEC)$.

23. În vârful A al triunghiului ABC se ridică perpendiculara AD pe planul său. Ducem $CE \perp AB$ și $EF \perp BD$.

Să se demonstreze că $BD \perp (CEF)$.

24. Fie punctele O, A, B, C cu proprietatea că $OA \perp OB \perp \perp OC$, $OA = OB = OC$ și D mijlocul lui (AB).

Să se demonstreze că $(ABC) \perp (CDO)$.

25. Fie $ABCD$ un pătrat de latură a. Pe planul pătratului se ridică de aceeaşi parte perpendicularele AM şi respectiv CN, astfel încât $AM = CN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Să se arate că $(MBD) \perp (NBD)$.

26. Fie $ABCDA'B'C'D'$ şi E, F, G, H centrele feţelor $ABCD$, $BCC'B'$, $CDD'C'$ şi respectiv $ADD'A'$.

Să se arate că planele (EFH) şi (FGH) sunt perpendiculare.

27. Fie ABC un triunghi oarecare, O mijlocul laturii (BC), M un punct pe perpendiculara în O pe (ABC). Ducem $AD \perp BC$, $AE \perp BM$ şi $AF \perp CM$. Să se demonstreze că:

a) $BM \perp (ADE)$; b) $CM \perp (ADF)$;

c) Dacă $BM \perp CM \Rightarrow (ADE) \perp (ADF)$.

28. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. Să se calculeze:

a) unghiul făcut de AB' cu BD;

b) unghiul făcut de $A'C'$ cu $B'C$;

c) unghiul făcut de AC cu $B'C'$.

29. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. Să se calculeze:

a) unghiul făcut de AC' cu BD;

b) unghiul făcut de AB' cu BD';

c) unghiul făcut de BD cu BC'.

30. Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată şi D mijlocul lui (BC). Ştiind că măsura unghiului AVD este de 90^0, să se determine tangenta unghiului diedru făcut de o faţă laterală cu planul bazei.

31. O piramidă patrulateră regulată are feţele laterale triunghiuri echilaterale. Să se determine:

a) unghiul făcut de o muchie laterală cu planul bazei;

b) cosinusul unghiului diedru făcut de o faţă laterală cu planul bazei.

32. O piramidă patrulateră regulată are secţiunea diagonală

un triunghi echilateral.

Să se calculeze tangenta unghiului diedru făcut de o față laterală cu planul bazei.

33. Fie $VABCDEF$ o piramidă hexagonală regulată cu muchia laterală de 2 ori mai mare decât latura bazei.

Să se determine:

a) unghiul format de o muchie laterală cu planul bazei;

b) cosinusul unghiului diedru făcut de o față laterală cu planul bazei.

34. Se consideră o piramidă patrulateră regulată cu unghiul făcut de o muchie laterală cu planul bazei de 45^0.

Să se determine tangenta unghiului făcut de o față laterală cu planul bazei.

35. Baza unei piramide este un hexagon regulat $ABCDEF$. Muchia laterală (MA) este perpendiculară pe bază, iar muchia opusă MD face cu planul bazei un unghi de $60°$. Notăm cu x și y unghiurile diedre făcute de planele (MBC) și (MCD) cu planul bazei.

a) Să se calculeze unghiurile diedre făcute de planele (MAB) și (MAF) cu planul bazei.

b) Să se demonstreze relația $tg\, x = 2 \cdot tg\, y$.

36. Fie $(ABCD)$ un pătrat de latură $a\sqrt{2}$ și d perpendiculara în A pe planul $(ABCD)$. Pe d se consideră punctul M astfel încât $AM = 2a$.

a) Să se determine unghiul făcut de MC cu planul $(ABCD)$.

b) Notând cu x și y unghiurile făcute de MB și MD cu planul $(ABCD)$, să se demonstreze relația: $tg\, x \cdot tg\, y = 2$.

37. Fie ABC un triunghi echilateral de latură $\frac{a}{\sqrt{3}}$ și d perpendiculara în A pe planul (ABC). Pe d se consideră punctul M astfel încât $AM = a$.

a) Să se determine unghiul făcut de dreptele MB, MC cu planul (ABC).

b) Să se determine unghiul diedru făcut de planele (MBC), (ABC).

38. Fie $ABCD$ un romb de latură a şi unghi ascuţit de 60°. În vârful A se ridică o perpendiculară d pe care se ia un punct M astfel încât $AM = a$.

a) Să se determine unghiurile făcute de dreptele MB, MC, MD cu planul (ABC).

b) Să se determine tangenta unghiului diedru făcut de planul (MBD), cu planul (ABC).

c) Să se arate că planele (MBC) şi (MCD) fac cu planul bazei unghiuri congruente.

39. Fie ABC un triunghi echilateral. În mijlocul D al laturii (BC) se ridică perpendiculara pe planul triunghiului şi se ia pe ea un segment (DE) congruent cu (AD). Să se calculeze unghiurile pe care le formează dreptele EA, EB, EC cu planul triunghiului.

40. Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată şi VO înălţimea piramidei. Ştiind că $VA = \sqrt{5} \cdot VO$, să se determine unghiul diedru făcut de o faţă laterală cu planul bazei.

41. În centrul O al unui dreptunghi se ridică perpendiculara pe planul dreptunghiului şi se consideră pe ea un segment OM de 12 cm. Laturile dreptunghiului sunt de 10 cm şi 18 cm. Se cer distanţele de la punctul M la laturile dreptunghiului.

42. Fie $ABCD$ un pătrat de latură a. În vârful D se ridică perpendiculara pe planul pătratului şi se consideră pe ea un segment $DE = 2a$.

Să se calculeze distanţele de la punctul E la laturile (AB), (BC) şi la diagonala (AC).

43. Fie ABC un triunghi echilateral de latură a. În vârful A se ridică perpendiculara pe planul triunghiului şi se consideră pe ea un segment $AD = 3a$.

Să se calculeze distanţele de la punctul D la laturile triunghiului şi la înălţimile triunghiului.

44. Fie ABC un triunghi oarecare de laturi $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm, $CA = 8$ cm. În vârful A se ridică o perpendiculară pe planul triunghiului şi se consideră pe ea un segment $AD = 10$ cm.

Să se calculeze distanţele de la punctul D la laturile şi înălţimile triunghiului.

45. Fie ABC un triunghi dreptunghic isoscel, $AB \perp AC$, $AB = AC = 5$ cm. În vârful A se ridică o perpendiculară şi se consideră pe ea un segment $AD = 5$ cm.

Să se calculeze distanţa de la D la BC.

46. Fie $ABCD$ un romb cu latura de 10 cm şi unghiul ascuţit de 60°. În vârful A se ridică o perpendiculară şi se consideră pe ea un segment $AE = 10$ cm.

Să se calculeze distanţele de la punctul E la laturile şi diagonalele rombului.

47. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat de latură 15 m. În vârful A se ridică o perpendiculară şi se consideră pe ea un segment $AD = 30$ m.

Să se calculeze distanţele de la D la laturile hexagonului.

48. Distanţa AB de la punctul A la planul p este a. Din punctul A ducem oblicele AC, AD care fac cu planul p unghiuri de 45° şi 30°, iar între ele un unghi drept.

Să se calculeze distanţa CD.

49. Fie $VABC$ o piramidă cu $VA = VB = VC = 5$ cm, iar triunghiul ABC isoscel cu măsura unghiului $B\hat{A}C$ de 120^0, $AB = AC = 4$ cm.

Să se determine înălţimea piramidei.

50. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de lungime a. Să se determine:

a) distanţa dintre diagonala BD' şi muchia CC'.

b) distanţa dintre AD şi BC'.

51. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat cu muchia egală cu a. Să se determine perpendiculara comună a dreptelor AB şi CD şi apoi să se calculeze distanţa dintre AB şi CD.

52. Fie α un plan şi $[AB]$ un segment în spaţiu care se proiectează pe α după segmentul $[A'B']$. Fie M mijlocul segmentului $[AB]$ şi M' mijlocul segmentului $[A'B']$.

Să se arate că punctul M se proiectează pe planul α în M'.

53. Fie α un plan şi ABC un triunghi oarecare în spaţiu astfel încât planul α nu este perpendicular pe planul (ABC). Triunghiul ABC se proiectează pe α după triunghiul $A'B'C'$. Fie M, N mijloacele segmentelor $[AB]$ şi $[AC]$ şi M', N' mijloacele segmentelor $[A'B']$ şi respectiv $[A'C']$.

Să se arate că segmentul $[MN]$ se proiectează pe planul α după segmentul $[M'N']$.

54. Fie α un plan şi $ABCD$ un paralelogram în spaţiu astfel încât planul α nu este perpendicular pe planul (ABC).

Să se demonstreze că proiecţia paralelogramului pe planul α este tot un paralelogram.

55. Fie α un plan şi $ABCD$ un dreptunghi în spaţiu astfel încât planul α nu este perpendicular pe planul $(ABCD)$ şi $AB \parallel \alpha$.

Să se demonstreze că proiecţia dreptunghiului pe planul α este tot un dreptunghi.

56. Fie α un plan şi ABC un triunghi dreptunghic în B astfel încât planul α nu este perpendicular pe planul (ABC) şi $AB \parallel \alpha$.

Să se demonstreze că proiecţia triunghiului ABC pe planul α este tot un triunghi dreptunghic.

57. Fie α un plan şi $ABCD$ un trapez dreptunghic, $AB \perp AD$, $A, B \in \alpha$ şi C', D' proiecţiile punctelor C şi D pe planul α. Să se demonstreze că $ABC'D'$ este trapez dreptunghic.

58. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. Să se determine:
a) proiecția segmentului (AC') pe planul $(ABCD)$;
b) proiecția segmentului (AA') pe planul $(ABCD)$;
c) proiecția segmentului (BB') pe planul $(ACC'A)$.
d) proiecția segmentului (AB) pe planul $(BB'D'D)$;
e) proiecția segmentului $(A'B)$ pe planul $(BB'D'D)$.

59. Fie α un plan și ABC un triunghi oarecare în spațiu astfel încât planul α nu este perpendicular pe planul (ABC). Triunghiul ABC se proiectează pe α după triunghiul $A'B'C'$.

Să se arate că centrul de greutate G al triunghiului ABC se proiectează pe planul α în centrul de greutate G' al triunghiului $A'B'C'$.

60. Un triunghi ABC (AB=8cm, BC=5cm, AC=7cm) are latura BC inclusă într-un plan p.

Să se afle aria proiecției triunghiului pe plan știind că proiecția este un triunghi dreptunghic.

61. Fie $ABCD$ un romb și α un plan ce trece prin diagonala BD a rombului. Fie E, F respectiv proiecțiile punctelor A și C pe planul α. Să se demonstreze că $AE = CF$.

62. În planul α se consideră două drepte d_1 și d_2 concurente în O. Dacă d este o dreaptă în spațiu ce trece prin O și face unghiuri congruente cu d_1 și d_2, atunci orice punct de pe dreapta d se proiectează pe planul α pe bisectoarea unghiului format de d_1 și d_2.

63. Să se demonstreze că dacă o dreaptă formează unghiuri congruente cu trei drepte concurente ale unui plan, atunci ea este perpendiculară pe acest plan.

64. Se dau în spațiu dreptele d și d'. Să se demonstreze că prin fiecare punct al spațiului trece o dreaptă perpendiculară pe d și pe d'.

65. Fie două plane perpendiculare p și q, iar A și B două

puncte pe intersecţia celor două plane. Fie $C \in p$ şi $D \in q$ astfel încât $m(A\hat{B}C) = 90°$, $m(A\hat{D}B) = 90°$. Să se demonstreze că triunghiurile CBD şi ADC sunt dreptunghice.

66. Pe perpendiculara în A pe planul triunghiului ABC se consideră un punct D. Să se demonstreze că dacă E şi F sunt proiecţiile punctului A pe dreptele DB respectiv DC, atunci patrulaterul $BEFC$ este inscriptibil.

67. Să se arate că nu există un tetraedru care are feţele laterale triunghiuri isoscele cu unghiul de la vârf (format de laturile congruente) de măsură 120^0 şi muchia laterală de lungime a.

68. Să se arate că nu există piramidă hexagonală regulată cu feţele laterale triunghiuri echilaterale.

69. Fie α un plan, M un punct exterior planului α şi MA, MB, MC oblicele care fac cu planul α unghiuri de 30^o, 45^o şi respectiv 60^o. Să se demonstreze relaţia:

$$\frac{1}{MA^2} + \frac{1}{MB^2} = \frac{1}{MC^2}.$$

70. Fie α un plan, M un punct exterior planului, $MO \perp \alpha$ şi MA, MB, MC oblicele care fac cu MO unghiuri de 30^o, 45^o şi respectiv 60^o. Să se demonstreze relaţia: $OB^2 = OA \cdot OC$.

71. Fie α un plan, A un punct exterior planului, $AO \perp \alpha$ şi oblicele AB, AC astfel încât triunghiul BOC să fie dreptunghic în O şi $m(O\hat{B}C) = m(O\hat{B}A) = 30^o$.

Să se demonstreze relaţia: $AB^2 + BC^2 = 4 \cdot AC^2$.

3. CALCUL DE ARII ŞI VOLUME

3.1 PRISMA DREAPTĂ

1. Se consideră prisma triunghiulară dreaptă $ABCA'B'C'$, cu baza ABC triunghi dreptunghic isoscel cu unghiul drept în A. Fie M mijlocul muchiei laterale (AA').

Ştiind că $AA' = 20$ cm şi unghiul diedru făcut de planele (MBC) şi (ABC) este egal cu 45^o, să se calculeze aria totală a prismei.

2. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă patrulateră regulată, având latura bazei de 8 cm şi M, N mijloacele muchiilor laterale (CC') şi respectiv (DD'). Aria patrulaterului $ABMN$ este de 80 cm^2. Să se calculeze volumul prismei.

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă patrulateră regulată şi $\{O'\} = A'C' \cap B'D'$. Ştiind că triunghiul $O'AB$ este echilateral de latură egală cu 8 cm, să se calculeze aria laterală a prismei.

4. Fie $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ o prismă hexagonală regulată în care se cunosc latura bazei egală cu 4 cm şi aria patrulaterului $CDF'A'$ egală cu 32 cm^2.

Să se calculeze volumul prismei.

5. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă patrulateră regulată, în care se cunoaşte aria laterală $A_l = 40$ cm^2 şi volumul $V = 20$ cm^3. Să se calculeze aria totală A_t.

6. Într-o prismă triunghiulară regulată latura bazei are lungimea 10 cm, iar diagonala unei feţe laterale face cu planul bazei un unghi de 60^o.

Să se calculeze aria laterală şi volumul prismei.

7. Într-o prismă triunghiulară regulată muchia laterală este a, iar unghiul făcut de o diagonală a unei feţe laterale cu altă

față laterală este de 45^o.

Să se determine aria totală și volumul prismei.

8. O prismă dreaptă $ABCA'B'C'$ are baza un triunghi dreptunghic în A, cu unghiul $\hat{B} = 30^0$ și $AC = 20$ cm. Diagonala AB' a feței laterale $ABB'A'$ face cu fața $AA'C'C$ un unghi de 45^0.

Să se determine aria laterală și volumul prismei.

9. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată, cu latura bazei a și D un punct situat pe segmentul BB' astfel încât planele ACD și $A'C'D$ să facă cu bazele unghiuri de măsură 30^0 și respectiv 60^0.

Să se determine aria laterală și volumul prismei.

10. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară dreaptă, în care laturile bazei sunt proporționale cu 2, 3 și respectiv 4, perimetrul triunghiului de bază este de 18 cm, iar înălțimea prismei este egală cu semiperimetrul triunghiului.

Să se calculeze aria și volumul prismei.

11. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară dreaptă, în care baza este un triunghi isoscel cu $AB = AC = a$ și măsura unghiului $B\hat{A}C$ este 120^o, iar diagonala $AB' = a\sqrt{2}$.

Să se calculeze aria totală și volumul prismei.

12. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic, cu diagonala bazei egală cu a, unghiul făcut de diagonala bazei cu una din laturile dreptunghiului de 30^0, iar unghiul făcut de diagonala paralelipipedului cu planul bazei de 45^0.

Să se determine volumul paralelipipedului.

13. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, segmentul ce unește intersecția diagonalelor bazei cu mijlocul muchiei laterale (CC') are lungimea 10 cm și face cu planul bazei un unghi de 30^0 și cu fața laterală $BB'C'C$ un unghi tot de 30^0.

Să se determine volumul paralelipipedului.

14. Volumul unui paralelipiped dreptunghic este de 30000 cm^3. Să se determine dimensiunile lui, știind că sunt proporționale cu numerele 2, 3 și 5.

15. Să se demonstreze că volumul unui paralelipiped dreptunghic nu se schimbă dacă am micșora cu o treime și respectiv cu o pătrime laturile dreptunghiului de bază, iar înălțimea paralelipipedului s-ar dubla.

16. Într-un paralelipiped dreptunghic raportul laturilor bazei este $\frac{3}{4}$, înălțimea paralelipipedului este 10 cm, iar diagonala lui este de $10\sqrt{2}$ cm.

Să se determine volumul și aria totală a paralelipipedului.

17. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic în care diagonala bazei face cu AB un unghi de 30^0, iar diagonala BD' a paralelipipedului face cu baza un unghi de 60^0. Înălțimea paralelipipedului are $10\sqrt{3}$ cm.

Să se calculeze volumul paralelipipedului.

18. Un paralelipiped drept are baza un romb de latură a și unghiul ascuțit de 60^0. Diagonala mare a rombului este egală cu diagonala mică a paralelipipedului.

Să se determine aria și volumul paralelipipedului.

19. Un paralelipiped drept are baza un romb cu latura de 10 cm, iar unghiul ascuțit de 60^0. Diagonala mică a paralelipipedului formează cu planul bazei un unghi de 30^0.

Să se calculeze aria laterală și volumul paralelipipedului.

20. Să se calculeze volumul unui paralelipiped drept cu baza un romb de latură $\sqrt{3}$ cm și un unghi ascuțit de 60^0, iar lungimea diagonalei mari a paralelipipedului de 5 cm.

21. Baza unui paralelipiped drept este un romb. Secțiunea determinată de o latură a bazei de jos și latura opusă a bazei de sus formează cu planul bazei un unghi de 60^0. Aria secțiunii este

egală cu 1 cm^2.

Să se determine aria laterală a paralelipipedului.

22. O prismă hexagonală regulată are diagonala cea mai mică de lungime a şi face cu planul bazei un unghi de 60^0.

Să se determine aria totală şi volumul prismei.

23. O prismă hexagonală regulată are aria laterală de 300 cm^2 şi volumul de $375\sqrt{3}$ cm^3.

Să se determine latura bazei şi înălţimea prismei.

24. Să se calculeze volumul prismei patrulatere regulate $ABCDA'B'C'D'$, cu latura bazei $AB = a$ şi unghiul dintre laturile BD' şi AC' de 60^0.

25. O prismă patrulateră regulată are diagonala de 10 cm, făcând cu planul bazei un unghi de 30^0.

Să se calculeze aria totală şi volumul prismei.

26. O prismă patrulateră regulată are volumul de 250 cm^3 şi aria laterală de 200 cm^2.

Să se arate că înălţimea prismei este de două ori mai mare decât latura bazei.

27. O prismă patrulateră regulată are latura bazei de 6 cm şi planul diagonal al prismei face cu planul bazei un unghi de 45^0.

Să se determine aria totală şi volumul prismei.

28. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic astfel încât $AB + AD + AA' = 20$ cm şi diagonala sa este de $10\sqrt{2}$ cm.

Să se calculeze aria totală a paralelipipedului.

29. Să se demonstreze că dacă într-un paralelipiped dreptunghic aria totală este egală cu suma pătratelor diagonalelor feţelor paralelipipedului, care pleacă din acelaşi vârf, atunci paralelipipedul este cub.

3.2. PIRAMIDA, TRUNCHIUL DE PIRAMIDĂ

1. Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată astfel încât latura bazei este de 12 cm, iar muchia laterală face cu planul bazei un unghi de 45^0.

Să se calculeze aria laterală şi volumul piramidei.

2. Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată în care muchiile laterale fac cu planul bazei un unghi de 45^0, iar volumul piramidei este de $18m^3$.

Să se calculeze aria totală a piramidei.

3. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat cu muchia de 9 cm.

Să se calculeze aria totală şi volumul tetraedrului.

4. Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară, cu baza triunghiul ABC dreptunghic în C, $AB = a$, iar măsura unghiului $B\hat{A}C$ este de 30^0. Toate muchiile laterale sunt înclinate faţă de baza cu un unghi de 60^0. Să se determine volumul piramidei.

5. Să se determine înălţimea unui tetraedru regulat de volum egal cu $\sqrt{3}$ cm^3.

6. Volumul unei piramide triunghiulare regulate este $\frac{1}{24}$ cm^3, iar unghiul făcut de o faţă laterală cu planul bazei este de 45^0. Să se determine aria totală a piramidei.

7. Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară în care VA este înălţimea piramidei, şi are lungimea de 12 cm. Perimetrul triunghiului ABC este 24 cm, iar laturile triunghiului: AB, BC, AC sunt proporţionale cu 1,5; 2,5; 2.

Să se calculeze aria totală şi volumul piramidei.

8. Se consideră piramida regulată $VABC$ având $AB = BC = CA = a$ şi $VA = VB = VC = b$ ($b < a$). Se notează cu P proiecţia vârfului A pe muchia (VB).

Să se calculeze:

a) aria triunghiului PAC;

b) volumul piramidei $PVAC$.

9. Un tetraedru regulat $VABC$ are muchia de 12 cm. Fie D şi E mijloacele laturilor (AB) şi (BC). Să se calculeze:
a) volumul piramidei $VDBE$;
b) aria laterală a piramidei $VDBE$.

10. Se dă piramida triunghiulară $VABC$ cu baza ABC triunghi dreptunghic isoscel ($m(\hat{BAC}) = 90°$). Ştiind că muchia $VA = 3\sqrt{3}$ este perpendiculară pe planul bazei şi că faţa laterală VBC face cu planul bazei un unghi de 60^0, se cere:
a) aria laterală şi totală a piramidei;
b) volumul piramidei;
c) distanţele de la A, B, C la feţele opuse.

11. Să se afle la ce distanţă de vârf trebuie secţionată o piramidă triunghiulară regulată cu un plan paralel cu planul bazei pentru ca volumul trunchiului de piramidă obţinut să fie jumătate din volumul piramidei date.

12. Se dă piramida triunghiulară $VABC$ cu baza ABC triunghi dreptunghic în A, cu $VA = 3$ cm şi perpendiculară pe planul bazei. Triunghiul VBC este isoscel, iar VB face cu planul bazei un unghi de 60^0.
Să se afle aria laterală, totală şi volumul piramidei.

13. Volumul unei piramide patrulatere regulate este 1 cm^3, iar unghiul format de o faţă laterală cu planul bazei este de 45^0. Să se determine latura bazei.

14. Volumul unei piramide patrulatere regulate este $\frac{\sqrt{6}}{6}$ cm^3, iar secţiunea diagonală a piramidei este un triunghi echilateral. Să se determine latura bazei piramidei.

15. O piramidă patrulateră regulată are aria totală de 864 cm^2, aria bazei de 324 cm^2. Să se determine:
a) volumul piramidei;
b) distanţa de la piciorul înălţimii piramidei la una dintre

feţele laterale.

16. Aria laterală a unei piramide patrulatere regulate este 240 cm^2, iar înălţimea 8 cm. Să se calculeze latura bazei.

17. O piarmidă patrulateră regulată are apotema egală cu 10 cm şi unghiul făcut de apotemă cu înălţimea este de 45^0.
Să se calculeze aria totală şi volumul piramidei.

18. Aria laterală a unei piramide patrulatere regulate este $2\sqrt{3}$, iar înălţimea este egală cu 1. Să se determine latura bazei.

19. Se consideră piramida patrulateră regulată cu feţele laterale triunghiuri echilaterale şi aria totală egală cu $1+\sqrt{3}$.
Să se determine latura bazei şi înălţimea piramidei.

20. Baza unei piramide $VABCD$ este un romb de latură a. Două feţe adiacente sunt înclinate faţă de planul bazei cu un unghi de 30^0, celelalte cu un unghi de 60^0. Înălţimea piramidei este h. Să se determine aria totală şi volumul piramidei.

21. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată de volum 1. Ştiind că muchiile laterale fac cu planul bazei unghiuri de 30^o să se determine muchia laterală.

22. Aria totală a unei piramide patrulatere regulate este $\sqrt{6}+\sqrt{2}\,cm^2$ şi faţa laterală are unghiul de la vârf egal cu 60^0.
Să se calculeze înălţimea piramidei.

23. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu latura bazei şi înălţimea direct proporţionale cu 3 şi 2 şi aria laterală de 240. Să se calculeze volumul piramidei.

24. Se consideră o piramidă patrulateră regulată $SABCD$ cu latura bazei de 10 cm şi înălţimea $SO = 12$ cm.
a) Să se calculeze aria laterală, aria totală şi volumul piramidei.
b) Fie M mijlocul înălţimii (SO). Să se calculeze distanţa de la punctul M la feţele laterale ale piramidei.

25. Fie $VABCD$ o piramidă cu baza $ABCD$ dreptunghi. Înălţimea piramidei cade în O, mijlocul laturii (CD).

a) Să se arate că $VC \perp BC$ şi $VD \perp AD$.

b) Ştiind că $VO = 8$ cm, $AB = 12$ cm, $BC = 2\sqrt{11}$ cm , să se demonstreze că triunghiul VAB este echilateral.

c) Pentru valorile de la punctul b) să se calculeze aria totală şi volumul piramidei.

26. Fie $VABCDEF$ o piramidă hexagonală regulată cu latura bazei de 10 cm. Unghiul făcut de o muchie laterală cu planul bazei are 60^o.

Să se calculeze aria totală şi volumul piramidei.

27. Fie $VABCDEF$ o piarmidă hexagonală regulată cu latura bazei a, iar unghiul diedru făcut de o faţă laterală cu planul bazei este de 45^o.

Să se calculeze aria totală şi volumul piramidei.

28. Fie $VABCDEF$ o piramidă hexagonală regulată cu latura bazei a, iar secţiunea diagonală un triunghi echilateral.

Să se calculeze aria totală şi volumul piramidei.

29. Baza unei piramide este un romb cu unghiul ascuţit de 45^0. Feţele laterale sunt înclinate faţă de planul bazei cu un unghi de 60^0 . Să se determine aria totală şi volumul piramidei ştiind că raza cercului înscris în romb este r.

30. Baza unei piramide este un dreptunghi cu diagonala de 200 cm şi unghiul format de diagonalele dreptunghiului de 60^0. Fiecare muchie laterală formează cu baza un unghi de 60^0.

Să se calculeze volumul piramidei.

31. O piramidă are ca bază dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = a$, $AD = b$. Muchia $VA = c$ este perpendiculară pe bază.

Să se calculeze:

a) lungimile muchiilor VB, VD, VC;

b) aria totală a piramidei.

32. Fie $VABCD$ o piramidă cu baza $ABCD$ un dreptunghi. Dacă M este un punct mobil pe segmentul (BC), iar N un punct mobil pe segmentul (AM), să se arate că $V_{VDMN} = V_{VBCN}$.

33. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un trunchi de piramidă patrulateră regulată ce are înălţimea egală cu 6 cm, muchia laterală face cu planul bazei mari un unghi de 60^0, iar diagonala trunchiului de piramidă face cu planul bazei un unghi de 45^0.

Să se calculeze aria laterală a trunchiului de piramidă.

34. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un trunchi de piramidă patrulateră regulată cu muchia laterală de 10 cm şi care este înclinată faţă de baza mare cu un unghi de 60^0. Diagonala trunchiului de piramidă este perpendiculară pe muchia laterală.

Să se determine volumul trunchiului de piramidă.

35. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are lungimile bazelor de $\sqrt{5}$ cm şi $\sqrt{2}$ cm, iar muchiile laterale au 5 cm.

a) Să se determine aria laterală, totală şi volumul trunchiului de piramidă.

b) Să se determine volumul piramidei din care provine trunchiul de piramidă.

36. Fie $VABC$ un tetraedru cu proprietatea că feţele VAB şi ABC au aceeaşi arie.

Să se arate că suma distanţelor unui punct oarecare de pe segmentul (CV) la feţele VAB şi ABC este constantă.

37. Latura bazei unei piramide triunghiulare regulate este a. Planul ce împarte unghiul format de două feţe laterale în două determină o secţiune ce reprezintă un triunghi dreptunghic.

Să se determine volumul piramidei.

38. Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată. Ea se secţionează prin planul VMN, unde M şi N sunt mijloacele laturilor (AB) şi (AC).

Să se determine raportul volumelor piramidelor $VAMN$ şi

3.3 CORPURI ROTUNDE

1. Într-un cilindru circular drept se cunosc: aria laterală $A_l = 60\pi$ cm^2 şi aria totală $A_t = 78\pi$ cm^2.
Să se calculeze volumul cilindrului.

2. Într-un cilindru circular drept se cunosc: aria laterală $A_l = 80\pi$ cm^2 şi volumul $V = 200\pi$ cm^3.
Să se calculeze aria totală a cilindrului.

3. Într-un cilindru circular drept aria laterală şi volumul au aceeaşi valoare, iar generatoarea este de 3 ori mai mare decât raza. Să se calculeze aria totală şi volumul cilindrului.

4. Într-un cilindru circular drept, volumul se exprimă printr-un număr de două ori mai mare decât aria laterală. Secţiunea axială a cilindrului este un pătrat.
Să se determine aria totală a cilindrului.

5. Aria laterală a unui con este de 2π cm^2 şi aria lui totală de 3π cm^2. Să se determine înălţimea conului şi unghiul făcut de generatoare cu înălţimea.

6. Unghiul făcut de generatoarea cu înălţimea unui con este de 60^o, iar suma dintre generatoare şi înălţime este de 30 cm.
Să se calculeze aria totală şi volumul conului.

7. Secţiunea axială a unui con este un triunghi echilateral, iar diferenţa dintre generatoare şi raza conului este de 20 cm.
Să se calculeze aria totală şi volumul conului.

8. Într-un con unghiul făcut de generatoare cu înălţimea este de 30^o. În cercul de bază se consideră o coardă $AB = a$ şi care subîntinde un arc de 60^o. Să se determine volumul conului.

9. Se consideră un con în care generatoarea face cu înălţimea un unghi de 30^o. Să se secţioneze conul printr-un plan paralel

cu baza astfel încât suprafeţele laterale ale corpurilor rămase să fie egale.

10. Se consideră un con de rotaţie având raza de 6 cm şi generatoarea de 10 cm. Să se arate că aria totală şi volumul conului se exprimă prin acelaşi număr.

11. Într-un con de vârf V se face o secţiune VAB astfel încât unghiul $A\hat{V}B$ este de 60^o şi coarda AB subîntinde în cercul de bază un unghi de 120^o. Ştiind că distanţa de la centrul bazei la planul (VAB) este a. Să se determine volumul conului.

12. Un plan ce trece prin vârful unui con face un unghi de 60^o cu planul bazei şi determină în cercul de bază un arc de mărime 90^o. Distanţa de la centrul bazei la plan este egală cu 1 cm. Să se determine aria totală şi volumul conului.

13. Două conuri au aceeaşi bază. Unghiurile făcute de generatoare cu înălţimile sunt de 60^o în conul mic şi de 30^o în conul mare.

Ştiind că volumul corpului cuprins între suprafeţele celor două conuri este de 1 cm^3, să se determine diferenţa înălţimilor celor două conuri.

14. Se consideră un con de vârf V şi O centrul bazei. Pe VO se consideră punctul C astfel încât C să fie mijlocul lui (VO), iar D mijlocul lui (CV). Prin C şi D se duc două plane paralele cu baza. Volumul conului este de 1 cm^3.

Să se determine volumul corpului din mijloc.

15. Două plane ce trec prin vârful unui con, fac cu planul bazei unghiuri de 30^o şi 60^o şi determină pe bază două coarde egale cu a şi b.

Să se determine raza şi înălţimea conului.

16. Un con circular drept are raza bazei de 4 cm şi generatoarea de 5 cm. La 1 cm depărtare de vârf se face o secţiune printr-un plan paralel cu baza. Să se calculeze:

a) Aria totală şi volumul conului dat .
b) Volumul conului mic.
c) Volumul conului cu baza cercul de secţiune şi vârful în centrul conului dat.

17. Un trunchi de con are generatoarea egală cu 25 cm, aria secţiunii medii egală cu $132{,}25\pi$ cm^2 şi aria secţiunii axiale egală cu 552 cm^2. Să se determine:
a) Înălţimea conului din care provine trunchiul de con.
b) Volumul trunchiului de con.

18. Se consideră un trunchi de con în care raza bazei mici este de 3 cm, iar raza bazei mari de 8 cm. Aria secţiunii axiale a trunchiului de con este de 55 cm^2. Să se determine:
a) Volumul trunchiului de con.
b) Volumul conului din care provine trunchiul de con.
c) Unghiul format de generatoare cu planul bazei.

19. Un trunchi de con are înălţimea de 18 cm, iar razele bazelor de 5 cm şi 11 cm. Înălţimea este împărţită în trei părţi egale de către două plane paralele cu bazele.
Să se determine:
a) Înălţimea conului din care provine trunchiul de con.
b) Volumul trunchiului de con.
c) Ariile secţiunilor determinate de cele două plane.

20. Se consideră un trunchi de con care are raza bazei mici de 4 cm, înălţimea de 8 cm, iar generatoarea este egală cu raza bazei mari. Să se calculeze:
a) Aria totală a conului din care provine trunchiul de con.
b) Aria totală şi volumul trunchiului de con.
c) Distanţele de la centrele bazelor la generatoare.

21. Se consideră un trunchi de con în care raza bazei mici are 1 cm, generatoarea are 5 cm, iar înălţimea trunchiului de con este egală cu raza bazei mari.
Să se calculeze:
a) Aria laterală şi volumul trunchiului de con.
b) Înălţimea conului din care provine trunchiul de con.

22. Un trunchi de con are generatoarea de 26 cm, raza bazei mari de 15 cm şi înălţimea de 24 cm.

a) Să se determine volumul trunchiului de con.

b) Să se determine aria secţiunuii axiale şi aria secţiunii mediі în trunchiul de con.

c) Să se arate că există un punct *I* egal depărtat de vârful conului din care provine trunchiul de con şi de punctele de pe cercul ce reprezintă baza mare.

23. Dintr-un punct de pe suprafaţa unei sfere de rază R, se duc trei coarde egale, ce fac între ele un unghi de 60^o.

Să se determine lungimea coardelor.

24. O sferă şi un cilindru au aceeaşi rază, iar secţiunea axială a cilindrului este un pătrat.

Să se arate că aria laterală a cilindrului este egală cu aria sferei.

25. Fie un con circular drept de înălţime 3 cm, secţionat de două plane paralele cu baza conului. Distanţele de la vârful conului la cele două plane sunt de 1 cm şi 2 cm.

Să se determine raportul dintre volumele trunchiurilor de con determinate de baza conului şi respectiv câte unul din cele două plane paralele.

26. Într-o prismă triunghiulară regulată se înscrie un cilindru. Să se determine raportul dintre volumul cilindrului şi volumul primei.

27. Într-o prismă patrulateră regulată, se înscrie un cilindru.

Să se determine raportul dintre aria laterală a cilindrului şi aria laterală a prismei.

28. Într-o prismă hexagonală regulată se înscrie un cilindru, iar în cilindru se înscrie o altă prismă hexagonală regulată.

Să se calculeze raportul ariilor laterale şi raportul volumelor celor două prisme.

29. Într-o sferă de rază 5 cm se fac secţiuni prin plane paralele la distanţele de 3 cm şi 4 cm de centrul sferei.

Să se calculeze aria laterală şi volumul trunchiului de con care are ca baze cele două cercuri de secţiune.

30. Două plane perpendiculare intersectează o sferă de rază R după cercurile de raze a şi b. Se cunoaşte distanţa c de la centrul sferei la dreapta de intersecţie a planelor.

Să se arate că $2R^2 \geq ab + bc + ca$.

31. Se consideră un con circular drept de secţiune axială VAB şi centrul bazei O. Pe înălţimea VO se consideră un punct I astfel încât distanţa de la I la planul bazei să fie egală cu distanţa de la I la generatoare. Notăm cu d această distanţă, cu V volumul conului şi cu A aria totală a conului.

Să se demonstreze relaţia: $3 \cdot V = d \cdot A$.

32. Se consideră un trunchi de con circular drept, în care generatoarea este egală cu suma razelor bazelor. Notăm cu V volumul trunchiului de con şi cu H înălţimea trunchiului de con. Să se demonstreze inegalitatea: $4 \cdot V \geq \pi \cdot H^3$.

4. PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Fie ABC un triunghi dreptunghic în C, în care $AC = 6$cm. Fie $CE \perp AB$ şi $CE = 4{,}8$cm. În A se ridică perpendiculara DA pe planul triunghiului ABC astfel încât $DA = 10$cm. Din E ducem $EF \perp DB$.

a) Să se calculeze aria triunghiului ABC.
b) Să se calculeze volumul piramidei $DABC$.
c) Să se calculeze EF.
d) Să se arate că $BD \perp (CEF)$.

2. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu laturile $AB = 8$cm şi $BC = 6$cm. În A ducem perpendiculara MA pe planul $(ABCD)$ astfel încât $MA = 10$cm.

a) Să se calculeze distanţa de la M la BD.
b) Să se calculeze distanţa de la C la planul (MBD).
c) Să se arate că există un punct K în spaţiu egal depărtat de punctele A, B, C, D şi M şi să se calculeze distanţa de la K la planul $(ABCD)$.
d) Fie $AE \perp MB$. Să se calculeze volumul piramidei $MAED$.

3. Fie $ABCD$ un romb de latură a şi unghiul ascuţit $\hat{A}$ de 60^o şi M un punct pe perpendiculara d în A pe planul rombului astfel încât $MA = 2a$. Fie N mijlocul lui $[CM]$ şi $\{O\} = AC \cap BD$.

a) Să se calculeze MB, MC, MD.
b) Să se calculeze volumul piramidei $MABCD$.
c) Să se arate că $MA \parallel (BDN)$.
d) Să se arate că $BD \perp (MAC)$.

4. Fie $ABCD$ un pătrat de latură a, $\{O\} = AC \cap BD$. În punctul D se ridică o perpendiculară pe planul $(ABCD)$ pe care se ia punctul M astfel încât $MD = a\sqrt{2}$.

a) Dacă N, P, Q sunt picioarele perpendicularelor duse din D pe MB, MC şi respectiv MA, să se calculeze lungimile segmentelor $[DN]$, $[DP]$ şi respectiv $[DQ]$.

b) Să se calculeze distanţele de la D la planele (MAB) şi respectiv (MBC).

c) Să se arate că $MO \perp AC$.

d) Să se aarte că $AC \perp (MBD)$.

e) Să se arate că $PQ \parallel (ABCD)$.

5. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. Notăm cu M, N, P mijloacele laturilor $[AB]$, $[AD]$ şi respectiv $[AA']$ şi cu Q centrul feţei $AA'D'D$.

a) Să se calculeze raportul volumelor piramidei $AMNP$ şi cubului $ABCDA'B'C'D'$.

b) Să se calculeze unghiul făcut de AC cu $B'D'$.

c) Să se calculeze unghiul făcut de $A'C'$ cu BC.

d) Să se arate că $MN \parallel (AB'D')$.

e) Să se demonstreze că $MQ \perp C'Q$.

f) Să se demonstreze că $BD' \perp (AB'C)$.

6. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu latura de 8 cm. Pe latura $[AB]$ se ia punctul M astfel încât $AM = 6$ cm şi pe latura $[BC]$ se ia punctul N astfel încât $NC = 2$ cm.

a) Să se arate că $AN \perp DM$.

b) Să se calculeze distanţa de la A' la DM.

c) Să se calculeze aria totală a piramidei $A'AMD$.

d) Să se calculeze raportul dintre volumul piramidei $A'AMD$ şi volumul prismei $ABDA'B'D'$.

e) Să se demonstreze că $A'C' \perp (DBB')$.

7. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub, M mijlocul lui $[DD']$ şi E proiecţia punctului D pe planul (MAC).

a) Să se calculeze raportul volumelor şi raportul ariilor totale pentru piramida $MACD$ şi cubul $ABCDA'B'C'D'$.

b) Să se calculeze unghiul făcut de AB cu CD'.

c) Să se calculeze unghiul făcut de AC cu $B'D'$.

d) Să se calculeze distanţa dintre dreptele AD şi $B'C'$.

e) Să se arate că $AE \perp MC$.

8. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub de muchie a şi O intersecţia diagonalelor bazei AC şi BD.

a) Să se calculeze volumele piramidelor $ABDA'$ şi

$C'A'BD$.

b) Să se arate că dreapta AC' este perpendiculară pe planul $(A'BD)$.

c) Fie $OP \perp A'C$. Să se arate că $OP \perp BD$.

d) Să se determine perpendiculara comună dreptelor $A'C$ și BD.

e) Să se calcule lungimea segmentului OP.

9. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$ și M, N, P mijloacele muchiilor $[AB]$, $[CC']$, $[A'D']$.

a) Să se arate că triunghiul ABD' este dreptunghic.

b) Să se calculeze distanța de la A la diagonala BD'.

c) Să se arate că piramidele $NABCD$ și $NADA'$ au același volum.

d) Dacă triunghiul MNP este echilateral, atunci paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ devine cub.

e) Dacă d este lungimea diagonalei paralelipipedului și p semiperimetrul lungimilor muchiilor paralelipipedului, atunci are loc inegalitatea: $2\cdot\sqrt{3}\,d \geq p$.

10. Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu latura bazei egală cu a. Planul ce împarte unghiul formal de fețele laterale (VAB) și (VBC) în două unghiuri congruente, determină o secțiune ce reprezintă un triunghi dreptunghic cu unghiul drept în V.

a) Să se calculeze înălțimea piramidei.

b) Să se demonstreze că $VA \perp VC$.

c) Să se calculeze distanța de la B la planul (VAC).

d) Dacă M, N, P sunt mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$ și respectiv $[AB]$, atunci $MN \perp (VPC)$.

11. Se consideră piramida triunghiulară $VABC$ în care: $VA = VB = VC = AB = AC = a$, iar unghiurile $A\hat{V}C$ și $A\hat{B}C$ sunt drepte.

a) Să se arate că $VB \perp AC$.

b) Să se calculeze aria totală și volumul piramidei $VABC$.

c) Să se arate că există un punct I situat la aceeași distanță de cele 4 vârfuri ale piramidei și să se calculeze această distanță.

12. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată în care se cunosc: unghiul de la vârful unei feţe laterale egal cu 60^o şi aria totală a piramidei, egală cu $(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ cm.

a) Să se calculeze A_l a piramidei.

b) Să se calculeze volumul V al piramidei.

c) Să se calculeze distanţa de la mijlocul înălţimii piramidei la o faţă laterală a ei.

d) Să se calculeze suma distanţelor de la centrul bazei la feţele laterale ale piramidei.

e) Să se calculeze distanţa de bază la care trebuie făcută o secţiune prin piramidă, astfel încât corpurile rezultate să aibă acelaşi volum.

13. Fie $VABCD$ o piramidă cu baza un pătrat de latură 4 cm, $VA \perp (ABCD)$, M mijlocul lui $[AB]$, N mijlocul lui $[BC]$ şi $E = AN \cap DM$. Înălţimea piramidei are 10 cm.

a) Să se calculeze aria laterală a piramidei V_{ABCD}.

b) Să se arate că $ED^2 + EN^2 = CD^2 + CN^2$.

c) Să se arate că $VE \perp DM$.

d) Să se determine aria totală a piramidei V_{AMD}.

e) Dacă O este centrul pătratului, să se calculeze suma distanţelor de la O la feţele laterale ale piramidei V_{ABCD}.

14. Fie $VABCD$ un tetraedru regulat cu latura de 1 cm.

a) Să se calculeze aria totală a tetraedrului.

b) Să se calculeze înălţimea DH a tetraedrului.

c) Să se arate că există un punct O egal depărtat de vârfurile A, B, C, D ale tetraedrului şi să se calculeze distanţa OA.

d) Să se arate că $AB \perp CD$.

e) Dacă I este un punct în interiorul tetraedrului, să se calculeze suma distanţelor de la I la feţele tetraedrului.

15. Fie $ABCA'B'C'$ un trunchi de piramidă triunghiulară regulată în care se dau: $AB = 2a$, $BB' = B'C' = a$.

a) Să se calculeze aria totală şi volumul trunchiului de piramidă.

b) Să se calculeze volumul piramidei din care provine trunchiul de piramidă.

c) Să se arate că triunghiul VAC este echilateral.

d) Dacă O este centrul cercului circumscris bazei, să se calculeze distanţa de la O la o faţă laterală.

16. Se consideră trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ în care $AB = 2a$, $A'B' = AA' = a$.

a) Să se calculeze aria totală şi volumul trunchiului de piramidă.

b) Să se calculeze înălţimea piramidei din care provine trunchiul de piramidă.

c) Să se arate că triunghiul AVC este dreptunghic.

d) Să se arate că există un punct M situat pe înălţimea trunchiului de piramidă, egal depărtat de planul bazei şi de faţa laterală, şi să se calculeze distanţa de la acest punct la planul bazei.

17. Se consideră un con circular drept, de secţiune axială VAB, care are înălţimea VO de 8 m şi generatoarea de 10 m.

a) Să se calculeze aria totală şi volumul conului.

b) Pe înălţimea VO a conului se consideră punctul E egal depărtat de planul bazei şi de generatoarele conului. Să se calculeze lungimea segmentului EO.

c) Pe înălţimea VO a conului se consideră punctul F egal depărtat de V şi de orice punct al cercului de bază al conului. Să se calculeze lungimea segmentului FV.

d) Prin punctele E şi F se duc două plane paralele cu bazele. Să se determine volumul trunchiului de con determinat de cele două plane.

18. Fie trunchiul de con de secţiune axială $A_1B_1A_2B_2$, O_1 şi O_2 centrele bazelor, O mijlocul înălţimii trunchiului. Ducem $OT \perp B_1B_2$. Înălţimea trunchiului de con are 10 cm, $OT = 5$ cm şi generatoarea trunchiului de con face cu planul bazei un unghi de 60^o.

a) Să se calculeze aria totală şi volumul trunchiului de con.

b) Să se calculeze înălţimea conului din care provine trunchiul de con.

c) Să se arate că secţiunea axială prin conul din care provine trunchiul de con este un triunghi echilateral.

d) Să se calculeze distanţele de la centrele feţelor O_1 şi O_2 la generatoarea conului din care provine trunchiul de con.

19. Un trunchi de con are ca secţiune axială trapezul isoscel $ABB'A'$ şi înălţimea $[OO']$. Razele bazelor trunchiului de con sunt de 5 cm şi 11 cm, iar înălţimea de 18 cm.

Fie O_1, O_2 puncte de pe înălţime care o împart pe aceasta în trei părţi congruente.

Fie M, N puncte pe înălţime astfel încât distanţa de la M la planul bazei mari să fie egală cu distanţa de la M la generatoare şi distanţa de la N la planul bazei mici să fie egală cu distanţa de la N la generatoare.

a) Să se calculeze volumul conului din care provine trunchiul de con.

b) Să se calculeze volumul trunchiului de con obţinut prin secţionarea trunchiului de con iniţial cu planele paralele cu bazele care trec prin punctele O_1 şi O_2.

c) Să se calculeze lungimile segmentelor $[MO]$ şi $[NO']$.

20. Se consideră un trunchi de con a cărui secţiune axială este trapezul isoscel $ABB'A'$, $AB \parallel A'B'$, unde $AB = 30$ cm, $BB' = 26$ cm, iar înălţimea trapezului are 24 cm.

a) Să se calculeze înălţimea conului din care provine trunchiul de con.

b) Să se determine volumul trunchiului de con.

c) Să se determine poziţia punctului M pe înălţimea trunchiului de con astfel încât distanţa de la M la planul bazei mari să fie egală cu distanţa de la M la generatoarea trunchiului de con.

d) Să se determine un punct I în spaţiu, egal depărtat de punctele A, B, A', B' şi apoi să se calculeze lungimea segmentului OA.

TESTE GRILĂ DE EVALUARE

TESTUL 1

1. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A cu catetele $[AB]$ și $[AC]$ egale respectiv cu 6 cm și 8 cm. Fie $AA' \perp BC$ și $AD \| BC$, $AD = A'C$ și $O = AC \cap A'D$.

Atunci segmentul $[A'O]$ are lungimea de :

a) 2 cm; b) 3 cm; c) 4 cm; d) 5 cm; e) 6 cm.

2. Fie ABC un triunghi isoscel cu baza $AB = 12$ cm și înălțimea $[CD]$ egală cu linia mijlocie $[DE]$.

Atunci aria triunghiului ABC are valoarea:

a) $10\ cm^2$; b) $12\sqrt{3}\ cm^2$; c) $20\ cm^2$; d) $15\sqrt{2}\ cm^2$; e) $8\ cm^2$.

3. Fie ABC un triunghi oarecare, $[BB']$ și $[CC']$ bisectoare, iar $I = BB' \cap CC'$. Prin I se duce dreapta $MN \| BC$, unde $M \in AB$, $N \in AC$.

Atunci expresia $MB + NC - MN$ ia valoarea:

a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) 4.

4. Fie $ABCD$ un romb de latură a și unghi ascuțit 60^0. În vârful A se ridică în spațiu o perpendiculară d pe care se ia un punct M astfel încât $AM = a$. Atunci tangenta unghiului diedru făcut de planul (MBD) cu planul (ABC) este:

a) $\sqrt{2}$; b) $\sqrt{3}$; c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; d) $\sqrt{6}$; e) 2.

5. Un con are înălțimea de 20cm, iar generatoarea de 25 cm.

Atunci distanța de la centrul bazei conului la o generatoare, are valoarea:

a) 8 cm; b) 10 cm; c) 12 cm; d) 14 cm; e) 16 cm.

6. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. Atunci unghiul $A'\hat{D}C'$ are valoarea:

a) 15^0; b) 30^0; c) 45^0; d) 60^0; e) 75^0.

TESTUL 2

1. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A cu $AB = 3$ cm şi $AC = 4$ cm. Fie D piciorul bisectoarei unghiului din A, iar E intersecţia perpendicularei ridicată în D pe BC cu cateta AC.

Atunci $[AE]$ ia valoarea:

a) 1 cm; b) 2 cm; c) $\frac{1}{3}$ cm; d) $\frac{2}{5}$ cm; e) $\frac{3}{7}$ cm.

2. Fie ABC un triunghi oarecare, AD bisectoarea unghiului $B\hat{A}C$. Cercul circumscris triunghiului ABD taie pe AC în N, iar cercul circumscris triunghiului ACD taie pe AB în M.

Atunci expresia $DM + DN - BC$ este egală cu:

a) –1; b) 0; c) 1; d) 2; e) 3.

3. Suprafaţa laterală a unui con este de 100π m^2, iar suprafaţa totală este de 150π m^2.

Atunci unghiul făcut de înălţime cu generatoarea este:

a) 15^0; b) 30^0; c) 45^0; d) 60^0; e) 75^0.

4. O piramidă patrulateră regulată are apotema egală cu 10 cm şi unghiul făcut de apotemă cu înălţimea este de 45^0.

Atunci aria totală a piramidei exprimată în cm^2 ia valoarea:

a) 200; b) $200\sqrt{2}$; c) $200(1+\sqrt{2})$; d) 150; e) $150\sqrt{3}$.

5. Fie VAB un con circular drept cu proprietatea că există un punct O' pe înălţimea $[VO]$ a conului, egal depărtat de bază şi de generatoare şi $OO' = 1$cm. Unghiul făcut de generatoare cu înălţimea este de 30^0. Fie $O'T \perp VA$.

Atunci volumul conului ce are ca bază planul ce trece prin T şi este paralel cu planul bazei şi vârful V este:

a) $\frac{\pi}{8}$ cm^3; b) $\frac{\pi}{4}$ cm^3; c) $\frac{3\pi}{4}$ cm^3; d) $\frac{3\pi}{8}$ cm^3; e) $\frac{\pi}{10}$ cm^3.

6. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. Atunci unghiul $A'\hat{C}'B$ are valoarea:

a) 15^0; b) 30^0; c) 45^0; d) 60^0; e) 75^0.

TESTUL 3

1. Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu $AB \| CD$, $[BC] \equiv [CD] \equiv [DA]$, $AB = 2 \cdot CD$.

Atunci unghiul $\hat{A}$ are valoarea:

a) 15^0; b) 30^0; c) 45^0; d) 60^0; e) 75^0.

2. Un triunghi ABC dreptunghic în A are $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm şi fie $[AA']$ înălţimea triunghiului.

Atunci raportul ariilor triunghiurilor ABA' şi ACA' este:

a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{4}{5}$; d) $\frac{2}{3}$; e) $\frac{9}{16}$.

3. Pe laturile AB şi AC ale triunghiului ABC se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABD şi ACE. Fie $\{I\} = BE \cap CD$. Atunci măsura unghiului $\hat{BIC}$ este:

a) 30^0; b) 60^0; c) 90^0; d) 120^0; e) 150^0.

4. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat de latură l şi O un punct în interiorul tetraedrului egal depărtat de feţele tetraedrului.

Atunci distanţa de la O la una din feţele tetraedrului este:

a) $\frac{l\sqrt{2}}{3}$; b) $\frac{l\sqrt{6}}{2}$; c) $\frac{l\sqrt{6}}{12}$; d) $\frac{l\sqrt{5}}{8}$; e) $\frac{l\sqrt{3}}{9}$.

5. Un con circulat drept are suprafaţa totală de 27π. Suprafaţa laterală a conului se desfăşoară după un semicerc.

În acest caz volumul conului este:

a) 9π; b) $9\sqrt{2}\pi$; c) $9\sqrt{3}\pi$; d) 12π; e) $12\sqrt{2}\pi$.

6. Un paralelipiped drept $ABCDA'B'C'D'$ are baza un romb de latură a şi unghiul ascuţit de 60^0. Diagonala mare a rombului este egală cu diagonala mică a paralelipipedului.

În aceste condiţii volumul paralelipipedului este:

a) a^3; b) $a^3\sqrt{2}$; c) $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$; d) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$; e) $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

TESTUL 4

1. Fie $ABCD$ un dreptunghi în care diagonala $AC = 2a$ şi unghiul ascuţit făcut de diagonale are 60^0.

Atunci lungimea laturii $[AB]$ este:

a) a; b) $\frac{a}{2}$; c) $a\sqrt{2}$; d) $a\sqrt{3}$; e) $2a$.

2. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic cu $AB \parallel CD$, $AD \perp AB$, $AB = 16$ cm, $CD = 9$ cm, iar diagonala AC este perpendiculară pe BC.

În aceste condiţii lungimea diagonalei AC este de:

a) 10 cm; b) 12 cm; c) 14 cm; d) 16 cm; e) 18 cm.

3. Se consideră dreptunghiul $ABCD$. Pe $[AB]$ şi $[BC]$ ca laturi se construiesc în exteriorul dreptunghiului, triunghiurile echilaterale ABE şi BCF. Fie M intersecţia dreptelor AE şi CF.

Atunci unghiul $E\hat{M}F$ are valoarea:

a) 15^0; b) 30^0; c) 45^0; d) 60^0; e) 75^0.

4. Fie ABC un triunghi de ortocentru H. Cercul ce trece prin punctele B, H, C intersectează pe AB în D.

Atunci raportul $\frac{AH}{DH}$ ia valoarea:

a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) 4.

5. Un cub $ABCDA'B'C'D'$ are latura de 1cm. Atunci volumul piramidei $A'ABD$ este:

a) $\frac{1}{2}$ cm^3; b) $\frac{1}{3}$cm^3; c) $\frac{1}{4}$cm^3; d) $\frac{1}{5}$cm^3; e) $\frac{1}{6}$ cm^3.

6. Un tetraedru regulat are latura de 6 cm. Atunci înălţimea tetraedrului are:

a) $\sqrt{6}$cm; b) $2\cdot\sqrt{6}$cm; c) $3\cdot\sqrt{6}$cm; d) $4\cdot\sqrt{6}$cm; e) $5\sqrt{6}$cm.

TESTUL 5

1. Fie $ABCD$ un trapez isoscel, $AB \| CD$, $AB = 10$ cm, $AD = BC = 4$ cm, în care diagonala AC este perpendiculară pe BC.

Atunci lungimea bazei mici $[CD]$ este:

a) 2 cm; b) 3,5 cm; c) 6,8 cm; d) 7,2 cm; e) 8,3 cm.

2. Fie ABC un triunghi în care $\hat{A} = 60^0$ şi $\hat{B} = 45^0$. Ducem bisectoarea $[AD]$, $D \in [BC]$ a unghiului A.

Atunci $AD - AC$ ia valoarea:

a) 0; b) 1; c) AB; d) BC; e) CA.

3. În triunghiul ABC se prelungeşte înălţimea $[BD]$ dincolo de B cu segmentul $[BB'] \equiv [AC]$ şi înălţimea $[CE]$ dincolo de C cu $[CC'] \equiv [AB]$.

Atunci unghiul $B'\hat{A}C'$ are valoarea:

a) 30^0; b) 45^0; c) 60^0; d) 75^0; e) 90^0.

4. Aria laterală a unei piramide patrulatere regulate este de 240 cm^2, iar înălţimea de 8 cm.

Atunci latura bazei piramidei are:

a) 4 cm; b) 6 cm; c) 8 cm; d) 10 cm; e) 12 cm.

5. Într-o prismă triunghiulară regulată se înscrie un cilindru.

Atunci raportul dintre volumul cilindrului şi volumul prismei este:

a) π; b) $\frac{\pi}{2}$; c) $\frac{\pi}{3}$; d) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$; e) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

6. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic, astfel încât $AB + AD + AA' = 20$ cm şi diagonala sa este de $10\sqrt{2}$ cm.

Atunci aria totală a paralelipipedului are:

a) 50 cm^2; b) 100 cm^2; c) 150 cm^2;
d) 200 cm^2; e) 250 cm^2.

TESTUL 6

1. Fie $ABCD$ un paralelogram, $\{O\} = AC \cap BD$ şi M, N, P, Q mijloacele segmentelor OA, OB, OC, OD. Atunci exptesia $\frac{MQ}{PN} + \frac{MN}{PQ}$ ia valoarea:

a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) 4.

2. Într-un triunghi ABC se cunosc $\hat{A} = 60^0$, $\hat{C} = 40^0$. Unghiul ascuţit pe care-l face bisectoarea unghiului $\hat{B}$ cu înălţimea ce pleacă din A are valoarea:

a) 10^0; b) 20^0; c) 30^0; d) 40^0; e) 50^0.

3. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB = 4$ cm şi $BC = 3$ cm şi $DI \perp AC$.

Atunci cos $\hat{CDI}$ are valoarea:

a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{2}{5}$; c) $\frac{3}{5}$; d) $\frac{4}{5}$; e) 1.

4. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat de latură egală cu l.

Atunci distanţa dintre centrele a două feţe este egală cu:

a) $\frac{l}{2}$; b) $\frac{l}{3}$; c) $\frac{l}{4}$; d) $\frac{l}{5}$; e) $\frac{l}{6}$.

5. Fie $VABCDEF$ o piramidă hexagonală regulată cu muchia laterală de 2 ori mai mare decât latura bazei., care este egală cu a.

Atunci volumul piramidei este egal cu:

a) a^3; b) $\frac{3a^3}{2}$; c) $2a^3$; d) $3a^3$; e) $\frac{3a^3}{4}$.

6. Într-o sferă de rază 14 cm este înscrisă o prismă triunghiulară regulată, care are diagonalele unei feţe laterale de 26 cm.

În acest caz baza prismei are lungimea:

a) 12 cm; b) 14 cm; c) 16 cm; d) 18 cm; e) 20 cm.

TESTUL 7

1. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, de laturi a, b, c.

Atunci expresia $E(a, b, c) = (b + c + a)(b + c - a)$ este egală cu:

a) $b + c$; b) $a + b + c$; c) bc; d) $2bc$; e) abc.

2. Aria unui trapez, care are laturile paralele de 16 cm şi 44 cm, şi cele neparalele de 17 cm şi 25 cm, este:

a) $100\ cm^2$; b) $250\ cm^2$; c) $300\ cm^2$;
d) $400\ cm^2$; e) $450\ cm^2$.

3. Fie M un punct în interiorul unui triunghi echilateral, astfel încât $M\hat{B}C = M\hat{C}B = 40^0$.

Atunci unghiul $A\hat{M}B$ are valoarea:

a) 70^0; b) 90^0; c) 110^0; d) 130^0; e) 150^0.

4. O piramidă patrulateră regulată are apotema egală cu 10 cm şi unghiul format de apotemă cu înălţimea este de 45^0. Atunci volumul piramidei are:

a) $50\ cm^3$; b) $100\ cm^3$; c) $\frac{1000\sqrt{2}}{3}\ cm^3$;
d) $1000\sqrt{2}\ cm^3$; e) $1000\sqrt{3}\ cm^3$.

5. Într-un cilindru circular drept aria laterală şi volumul se exprimă prin acelaşi număr, iar generatoarea este de 3 ori mai mare decât raza.

În acest caz aria totală a cilindrului este de:

a) 20π; b) 25π; c) 30π; d) 32π; e) 37π.

6. Se consideră un con circular drept cu diametrul bazei de 12 cm şi înălţimea de 8 cm. Fie K un punct pe înălţime, egal depărtat de bază şi de generatoare.

Atunci distanţa de la K la bază este de:

a) 1 cm; b) 2 cm; c) 3 cm; d) 4 cm; e) 5 cm.

TESTUL 8

1. Fie $ABCD$ un trapez isoscel, $AB \| CD$, $AD=BC=$ $= 4$ cm, $AB = 10$ cm, în care diagonala AC este perpendiculară pe BC. Atunci baza mică CD are lungimea:
a) 6 cm; b) 6,2 cm; c) 6,4 cm; d) 6,6 cm; e) 6,8 cm.

2. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, $[CC']$ bisectoarea unghiului C, $C'D \perp BC$ și E simetricul punctului D față de C. Atunci unghiul $D\hat{A}E$ are valoarea:
a) 30^0; b) 60^0; c) 90^0; d) 120^0; e) 150^0.

3. Fie ABC un triunghi oarecare și M un punct arbitrar pe latura $[BC]$. Ducem $MN \| AB$ și $MP \| AC$.
Atunci expșresia $\frac{NC}{AC} + \frac{PB}{AB}$ are valoarea:
a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) 4.

4. Fie $VABCD$ o piramidă cu baza $ABCD$ un dreptunghi. În acest caz valoarea expresiei
$$VA^2 + VC^2 - VB^2 - VD^2 \text{ este:}$$
a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) 4.

5. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat cu latura egală cu 1 cm și O un punct egal depărtat de vârfurile A, B, C, D ale tetraedrului. Atunci segmentul $[OA]$ are lungimea de:
a) 1 cm; b) 2 cm; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm; d) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ cm; e) $\frac{\sqrt{6}}{5}$ cm.

6. Un trunchi de con are generatoarea de 26 cm, raza bazei mari de 15 cm și înălțimea de 24 cm. Atunci volumul conului din care provine trunchiul de con este:
a) 900π cm^3; b) 1800π cm^3; c) 2700π cm^3;
d) 3600π cm^3; e) 4500π cm^3.

TESTUL 9

1. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A cu ipotenuza $BC = 5$ cm. Fie $AA' \perp BC$ şi $\frac{A'B}{A'C} = \frac{9}{16}$.

Atunci înălţimea $[AA']$ are lungimea:

a) 2 cm; b) 2,1 cm; c) 2,2 cm; d) 2,3 cm; e) 2,4 cm.

2. Un triunghi ABC dreptunghic în A, are catetele $AB = 3$ cm, $AC = 4$cm şi fie $[AA']$ înălţimea triunghiului. Atunci raportul ariilor triunghiurilor ABA' şi ACA' este:

a) $\frac{9}{8}$; b) $\frac{9}{10}$; c) $\frac{9}{12}$; d) $\frac{9}{14}$; e) $\frac{9}{16}$.

3. Fie $ABCD$ un trapez oarecare şi M un punct arbitrar pe diagonala AC. Se duc $MN \parallel AD$ şi $MP \parallel BC$.

Atunci expresia $\frac{MN}{AD} + \frac{MP}{BC}$ ia valoarea:

a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) 4.

4. Într-o prismă triunghiulară regulată latura bazei are lungimea 10 cm, iar diagonala unei feţe laterale face cu planul bazei un unghi de 60^0. În acest caz volumul prismei este de :

a) 150 cm^3; b) 300 cm^3; c) 450 cm^3; d) 600 cm^3; e) 750 cm^3.

5. Într-o sferă de rază 5 cm se fac secţiuni prin plane paralele situate de o parte şi de alta a centrului la distanţele de 3 cm şi 4 cm de centrul sferei. Aria laterală a trunchiului de con care are ca baze cele două cercuri de secţiune este de:

a) $25\pi\sqrt{2}$ cm^2; b) $30\pi\sqrt{2}$ cm^2; c) $35\pi\sqrt{2}$ cm^2;
d) $40\pi\sqrt{2}$ cm^2; e) $45\pi\sqrt{2}$ cm^2.

6. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub şi $\{O\} = AC \cap BD$.

Atunci unghiul $A\hat{O}D$ are valoarea:

a) 30^0; b) 60^0; c) 75^0; d) 90^0; e) 120^0.

TESTUL 10

1. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 3$ cm şi $BC = 4$ cm. Fie $E \in [AC]$ astfel încât $BE \perp AC$ şi $\{F\} = BE \cap AD$. Atunci segmentul AF are lungimea de:
a) 2 cm; b) 2,25 cm; c) 2,5 cm; d) 2,75 cm; e) 3 cm.

2. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm, $AD \perp BC$. Paralela prin D la AB intersectează pe $[AC]$ în E.
Atunci segmentul AE are lungimea de:
a) 1,5 cm; b) 2,2 cm; c) 2,88 cm; d) 3,14 cm;
e) 3,62 cm.

3. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil cu O intersecţia diagonalelor şi $AC^2 - BD^2 = 100$.
Atunci expresia $E = OA^2 - OB^2 + OC^2 - OD^2$ ia valoarea:
a) 25; b) 50; c) 75; d) 100; e) 125.

4. Desfăşurarea suprafeţei laterale a unui con circular drept este un sector de cerc cu unghiul de măsură 120^0 şi cu raza de lungime 9 cm. Atunci aria laterală a conului are:
a) 18π cm^2; b) 21π cm^2; c) 24π cm^2;
d) 27π cm^2; e) 30π cm^2.

5. O piramidă patrulateră regulată are secţiunea diagonală un triunghi echilateral.
Atunci tangenta unghiului diedru făcut de o faţă laterală cu planul bazei este de:
a) $\sqrt{2}$; b) $\sqrt{3}$; c) $\sqrt{4}$; d) $\sqrt{5}$; e) $\sqrt{6}$.

6. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat de latură l, $DH \perp (ABC)$, iar E mijlocul segmentului $[DH]$.
Atunci unghiul $A\hat{E}B$ are măsura de:
a) 30^0; b) 45^0; c) 60^0; d) 75^0; e) 90^0.

1. DREAPTA

4. Prin punctul $A_i\,(i=\overline{1,n})$ trec $n-1$ drepte. Atunci prin cele n puncte ar trece $n(n-1)$ drepte. Însă dreapta $A_iA_j\,(1\le i,j\le n)$ trece prin 2 puncte. Atunci numărul de drepte este $\frac{n(n-1)}{2}$.

18. Dacă $a>b$ avem $AM=\frac{a+b}{2}<a \Rightarrow M\in[AB]$.

$MB=MC-BC=\frac{a+b}{2}-b=\frac{a-b}{2}$. Analog celălalt caz.

21. Fie $[AC]\equiv[BD] \Rightarrow [AB]\equiv[CD] \Rightarrow M, N$ coincid. Fie $M=N \Rightarrow MB=MC$ şi $MA=MD \Rightarrow AC=BD$.

26. Dacă $M\in[AN] \Rightarrow MB=MN+NB$, $AN=AM+MN$. $AM-BM=AN-BN \Rightarrow AM-MN-NB=AM+MN-BN \Rightarrow MN=0$. Dacă $N\in[AM]$ se procedează analog.

27. $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AB\cdot CD+(AB+BD)\cdot BC=$
$=AB\cdot CD+AB\cdot BC+BD\cdot BC=AB\cdot BD+BD\cdot BC=BD\cdot AC$.

28. Se consideră cazurile $B\in[AC]$ şi $B\notin[AC]$.

29. Se calculează O_1O_3 folosind problema **28.**

30. Dacă $B\in[AO] \Rightarrow OA=OB+BA \Rightarrow OA+OB=$
$=2\cdot OB+AB \Rightarrow 2\cdot OM=2\cdot OB+AB$ şi cum $OM=OB+BM$ rezultă $2\cdot OB+2\cdot BM=2\cdot OB+AB \Rightarrow 2\cdot BM=AB$ şi deci M este mijlocul lui $[AB]$. Analog dacă $A\in[OB]$.

31. Considerăm pe aceeaşi dreaptă un punct O astfel încât A, B, C, A_1, A_2 să se afle de aceeaşi parte faţă de O. Evident avem relaţiile: $2\cdot OP=OB+OC$, $2\cdot OB=OA+OA_1$ şi $2\cdot OC=OA+OA_2$. Rezultă $2\cdot OP=OA+\frac{OA_1+OA_2}{2}=$
$=OA+OQ$. Se arată uşor că $P\in[AQ]$.

32. a) $[BC]$; b) $(CD$; c) $\{B\}$; d) $\varnothing$; e) $[BC]$.

33. a) B, A, C; b) A, B, C.

38. $M\in(AB)$, $\frac{MA}{MB}=k \Rightarrow \frac{MA}{k}=\frac{MB}{1}=\frac{AB}{k+1} \Rightarrow$
$\Rightarrow MA=\frac{k}{k+1}\cdot AB$ şi $MB=\frac{1}{k+1}\cdot AB$.

I. $k < 1 \Rightarrow N \notin (AB.\ \frac{NA}{NB} = k \Rightarrow \frac{NB}{1} = \frac{NA}{k} = \frac{AB}{1-k} \Rightarrow$

$\Rightarrow NA = \frac{k}{1-k} \cdot AB$ şi $NB = \frac{1}{1-k} \cdot AB.$

II. $k > 1 \Rightarrow N \notin (BA.\ \frac{NA}{k} = \frac{NB}{1} = \frac{AB}{k-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow NA = \frac{k}{k-1} \cdot AB$ şi $NB = \frac{1}{k-1} \cdot AB.$

2. UNGHIUL

5. a) Presupunem că $A\hat{O}B$ are două bisectoare $[OM$, $[ON$. Se arată că $m(M\hat{O}N) = 0^o$. b) Da.

8. Se arată că $m(M\hat{O}N) = m(C\hat{O}D) = m(A\hat{O}B)$, unde $[OM$ este bisectorea lui $A\hat{O}C$ şi $[ON$ bisectoarea lui $B\hat{O}D$.

13. Se consideră cazurile: $m(A\hat{O}B) > m(B\hat{O}C)$ şi $m(A\hat{O}B) < m(B\hat{O}C)$.

14. Luăm $[OM$ bisectoarea unghiului $B\hat{O}C$.

15. Dacă $m(A\hat{O}C) < m(B\hat{O}C)$, se arată că $[OZ$ este interioară unghiului $C\hat{O}M$. Apoi se arată că $[OZ$ este bisectoarea unghiului $C\hat{O}M \Rightarrow m(C\hat{O}Z) = m(M\hat{O}Z)$.

16. Presupunem că cele două unghiuri nu sunt opuse la vârf. Atunci considerăm semidreapta $[OB''$ opusă semidreptei $[OB$. Obţinem unghiurile $A\hat{O}B$ şi $A'\hat{O}B''$ opuse la vârf, de unde rezultă $m(A\hat{O}B) = m(A'\hat{O}B'') \Rightarrow m(A'\hat{O}B'') = m(A'\hat{O}B')$.

Cum $[OB'$ şi $[OB''$ sunt de aceeaşi parte a dreptei AA' rezultă $m(B'\hat{O}B'') = 0 \Rightarrow [OB' \equiv [OB''$ coincid, fals.

18. Notăm $m(A\hat{O}C) = m(B\hat{O}C) = \alpha$. Avem 4 cazuri.

1) Luăm $[OM$ astfel încât $[OB$ să fie între $[OM$ şi $[OA$.

$m(A\hat{O}M) = m(C\hat{O}M) + m(A\hat{O}C) = m(C\hat{O}M) + \alpha$ şi

$m(B\hat{O}M) = m(C\hat{O}M) - m(B\hat{O}C) = m(C\hat{O}M) - \alpha$. Rezultă

$m(A\hat{O}M) + m(B\hat{O}M) = 2 \cdot m(C\hat{O}M) \Rightarrow m(C\hat{O}M) =$

$= \frac{m(A\hat{O}M) + m(B\hat{O}M)}{2}$. Celalte cazuri se tratează analog.

20. Notăm $m(A\hat{O}X) = \alpha$ şi $m(B\hat{O}Y) = \beta$. Se consideră pe rând cazurile: $\alpha + \beta < 90^o$, $\alpha + \beta > 90^o$ şi $\alpha + \beta = 90^o$.

21. Se foloseşte reducerea la absurd.

3. PERPENDICULARITATE

2. Notăm $m(A\hat{O}N) = m(N\hat{O}M) = m(M\hat{O}B) = \alpha$.
$[OA \perp [OM \Rightarrow m(A\hat{O}M) = 90^o \Rightarrow m(A\hat{O}N) + m(N\hat{O}M) = 90^o$.
Atunci $2\cdot\alpha = 90^o \Rightarrow \alpha = 45^o$. $m(B\hat{O}N) = m(B\hat{O}M) +$
$+m(M\hat{O}N) = 2\cdot\alpha = 90^o \Rightarrow [OB \perp [ON$; $m(A\hat{O}B) = 3\cdot\alpha = 135^o$.

3. Fie $A'\hat{O}B'$ ascuţit. $m(A'\hat{O}B') = m(B\hat{O}B') - m(A'\hat{O}B) =$
$= 90^o - m(A'\hat{O}B)$. $m(A\hat{O}B) = m(A\hat{O}A) - m(A'\hat{O}B) =$
$= 90^o - m(A'\hat{O}B)$. Atunci $m(A\hat{O}B) = m(A'\hat{O}B')$.
Analog se demonstrează pentru $A''\hat{O}B''$.
Pentru $A''\hat{O}B'$ avem: $m(A''\hat{O}B') = 180^o - m(A'\hat{O}B') =$
$= 180^o - m(A\hat{O}B) \Rightarrow m(A\hat{O}B) + m(A''OB'') = 180^o$.

6. $AC = BD \Rightarrow AC - BC = BD - BC \Rightarrow$
$\Rightarrow AB = CD$. Fie M mijlocul segmentului $[BC] \Rightarrow MB = MC$.
Atunci $AB + BM = CD + MC \Rightarrow AM = MD$.

7. Dacă $[BC]$ şi $[AD]$ au aceeaşi mediatoare, atunci ele au acelaşi mijloc M. Deci $MB = MC$ şi $MA = MD \Rightarrow$
$\Rightarrow MA - MB = MD - MC \Rightarrow AB = CD \Rightarrow$
$\Rightarrow\Rightarrow AB + BC = BC + CD \Rightarrow AC = BD \Rightarrow [AC] \equiv [BD]$.

9. Notăm $m(A\hat{O}B) = m(B\hat{O}C) = m(C\hat{O}D) = m(D\hat{O}A) = \alpha$.
$m(A\hat{O}B) + m(B\hat{O}C) + m(C\hat{O}D) + m(D\hat{O}A) = 360^o \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha = 90^o$. $m(A\hat{O}C) = m(A\hat{O}B) + m(B\hat{O}C) = 180^o$, de unde rezultă că $[OA$ şi $[OC$ sunt în prelungire. Analog $[OB$ şi $[OD$ sunt în prelungire.
$m(A\hat{O}B) = 90^o \Rightarrow [OA \perp [OB \Rightarrow AC \perp BD$.

10. Din problema precedentă rezultă că bisectoarele $[OM$ şi $[OM'$ sunt semidrepte opuse, la fel şi bisectoarele $[ON, [ON'$. De asemenea $ON \perp OM \Rightarrow NN' \perp MM'$.

4. TRIUNGHIUL

4. Triunghiurile OAB' şi OBA' sunt congruente, de unde rezultă $AB'O \equiv BA'O$ şi $OAB' \equiv OBA'$. Atunci triunghiurile IBB' şi IAA' sunt congruente, de unde rezultă $[IA'] \equiv [IB']$. În continuare triunghiurile OIA' şi OIB' sunt congruente, de unde rezultă $A'OI \equiv B'OI$ şi deci $[OI$ este bisectoarea lui XOY.

10. $[AD]$ este înălțime și deci mediană. Se arată pe rând congruența triunghiurilor BDM și CDM; BCN și CBL; BMN și CML. De aici rezultă că $[MN] \equiv [ML]$.

11. a) $\Delta QCB \equiv \Delta PBC \Rightarrow [BQ] \equiv [CP]$.

b) $\Delta QCB \equiv \Delta PBC \Rightarrow Q\hat{B}C \equiv P\hat{C}B$, de unde rezultă că triunghiul MBC este isoscel, de unde $[MB] \equiv [MC]$.

12. Luăm pe latura $[AC]$ punctul Q' astfel încât $[BP] \equiv [CQ'] \Rightarrow [BQ'] \equiv [CP]$. Fie $[BD]$ înălțimea din B. Simetricul lui Q' față de D îl notăm cu Q. Însă $[BQ] \equiv [BQ']$. Atunci $[BQ] \equiv [CP]$, dar $[BP]$ nu este congruent cu $[CQ]$.

16. 1) Dacă $M \in [AD] \Rightarrow \Delta MBD \equiv \Delta MCD \Rightarrow B\hat{M}D \equiv C\hat{M}D \Rightarrow A\hat{M}B \equiv A\hat{M}C$. $\Delta AMB \equiv \Delta AMC \Rightarrow [AB] \equiv [AC]$.

2) Dacă $M' \notin [DA \Rightarrow \Delta M'BD \equiv \Delta M'CD \Rightarrow B\hat{M}'D \equiv C\hat{M}'D$. $\Delta ABM' \equiv \Delta ACM' \Rightarrow [AB] \equiv [AC]$.

3) $M'' \notin [AD$ se tratează analog.

19. $\Delta B'CD \equiv \Delta B'AB \Rightarrow [CD] \equiv [AB]$;
$\Delta C'BE \equiv \Delta C'AC \Rightarrow [BE] \equiv [AC]$. Deci $[BE] \equiv [CD]$.

21. a) Se folosesc congruențele de triunghiuri $BC'C$, $BC'C''$ și respectiv $CB'B$, $CB'B''$, de unde rezultă $[BC''] \equiv [BC]$ și $[CB''] \equiv [CB]$. Deci $[BC''] \equiv [CB'']$.

b) Se folosesc congruențele de triunghiuri $AB'B$, $AB'B''$ și $AC'C$, $AC'C''$, de unde rezultă $[AB] \equiv [AB'']$ și $[AC] \equiv [AC'']$. Deci $[AB''] \equiv [AC'']$.

5. PARALELISM
5.1 PARALELISM

1. a) $d \parallel g \Rightarrow N\hat{B}A \equiv M\hat{A}B$ (1). $m(N\hat{B}E) = m(A\hat{B}E) = \frac{m(N\hat{B}A)}{2}$ (2). $m(M\hat{A}D) = m(B\hat{A}D) = \frac{m(M\hat{A}B)}{2}$ (3).

Din (1), (2) și (3) rezultă $m(A\hat{B}E) = m(B\hat{A}D) \Rightarrow AD \parallel BE$.

c) $d \parallel g \Rightarrow N\hat{B}E \equiv A\hat{E}B \Rightarrow A\hat{E}B \equiv A\hat{B}E \Rightarrow [AE] \equiv [AB]$

$d \parallel g \Rightarrow M\hat{A}D \equiv B\hat{D}A \Rightarrow B\hat{D}A \equiv B\hat{A}D \Rightarrow [AB] \equiv [DB]$.

4. $[BI$ este bisectoare pentru $A\hat{B}C \Rightarrow I\hat{B}C \equiv I\hat{B}M$ (1)

$MI \parallel BC \Rightarrow M\hat{I}B \equiv I\hat{B}C$ (2). Din (1) și (2) rezultă că $I\hat{B}M \equiv B\hat{I}M \Rightarrow \Delta MIB$ este isoscel $\Rightarrow MB = MI$ (3). Analog $NC = NI$ (4). Din (3) și (4) rezultă $MB + NC = MN$.

8. $[AD$ bisectoare $\Rightarrow F\hat{A}D \equiv E\hat{A}D$; $DE \parallel AB \Rightarrow$ $F\hat{A}D \equiv A\hat{D}E$. De aici rezultă $E\hat{A}D \equiv A\hat{D}E \Rightarrow [AE] \equiv [DE]$ (1)
Analog se arată că $[AF] \equiv [DF]$ (2).
Însă $\Delta EAD \equiv \Delta FDA \Rightarrow [EA] \equiv [FD]$ (3).
Din (1) și (3) rezultă $[DE] \equiv [FD]$ și deci ΔDEF este isoscel.
Dacă $m(\hat{A}) = 60^o$ rezultă $m(F\hat{D}E) = 60^o$ și atunci triunghiul DEF este echilateral.

9. $MS \parallel AB \Rightarrow B\hat{A}M \equiv A\hat{M}S$ și $C\hat{M}S \equiv M\hat{B}A$.
$[MS$ este bisectoarea unghiului $A\hat{M}C \Rightarrow A\hat{M}S \equiv C\hat{M}S$.
Atunci $B\hat{A}M \equiv M\hat{B}A \Rightarrow [AM] \equiv [MB]$. Analog $[AM] \equiv [MC]$.
Rezultă că $[AM]$ este mediană și $AM = \frac{BC}{2}$, de unde triunghiul ABC este dreptunghic isoscel în A.

15. Ducem înălțimea $[AD]$. Atunci $AD \perp BC$, $BM \perp BC \Rightarrow$ $AD \parallel BM \Rightarrow A\hat{B}M \equiv B\hat{A}D$. Analog $A\hat{C}N \equiv C\hat{A}D$. Atunci rezultă $m(A\hat{B}M) + m(A\hat{C}N) = m(B\hat{A}D) + m(C\hat{A}D) = m(\hat{A})$.

5.2 SUMA UNGHIURILOR UNUI TRIUNGHI. UNGHI EXTERIOR UNUI TRIUNGHI

3. a) Dacă $AB = AC$ și $A\hat{B}D = 120^0 \Rightarrow m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = 60^0$.
b) Dacă $AB = AC$ și unghiul exterior $B\hat{A}E = 120^0 \Rightarrow$
$\Rightarrow m(\hat{A}) = 60^o \Rightarrow m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = 60^o \Rightarrow \Delta ABC$ este echilateral.

4. Fie $[BB'$ bisectoarea unghiului $\hat{B}$, $[AA']$ înălțimea din A și $\{L\} = AA' \cap BB'$.
$m(A\hat{B}C) = 180^0 - m(\hat{A}) - m(\hat{C}) = 180^0 - 60^0 - 40^0 = 80^0 \Rightarrow$
$\Rightarrow m(L\hat{B}A') = 80^0 : 2 = 40^0 \Rightarrow m(A'\hat{L}B) = 90^0 - 40^0 = 50^0$

5. ΔBMC este isoscel $\Rightarrow BM = CM$ (1)
$A\hat{B}M = A\hat{C}M = 40^0$ (2); $AB = AC$ (3) $\Rightarrow \Delta ABM \equiv \Delta ACM \Rightarrow$
$\Rightarrow A\hat{M}B = A\hat{M}C = \frac{360^0 - B\hat{M}C}{2} = \frac{360^0 - 140^0}{2} = 110^0$.

6. Din $\Delta ABA'$ avem: $AA'B = 180^0 - \hat{B} - \frac{1}{2}\hat{A}$. Analog:
$BB'C = 180^0 - \hat{C} - \frac{1}{2}\hat{B}$ și $CC'A = 180^0 - \hat{A} - \frac{1}{2}\hat{C}$. Adunând membru cu membru cele trei relații obținem:

$V = A\hat{A}'B + B\hat{B}'C + C\hat{C}'A = 540^0 - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) -$
$- \frac{1}{2}\cdot(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) = 540^0 - 180^0 - \frac{1}{2}\cdot 180^0 = 270^0.$

7. $B\hat{H}C = 180^0 - H\hat{B}C - H\hat{C}B = 180^0 - (90^0 - \hat{C}) -$
$- (90^0 - \hat{B}) = \hat{B} + \hat{C}.$

9. În triunghiul IBC, [IM este bisectoare și atunci:
$B\hat{I}C = 180^0 - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{C}}{2} \Rightarrow B\hat{I}M = C\hat{I}M = 90^0 - \frac{\hat{B}}{4} - \frac{\hat{C}}{4};$
$I\hat{B}M = \frac{\hat{B}}{4}; I\hat{C}M = \frac{\hat{C}}{4}; I\hat{M}B = 180^0 - I\hat{B}M - B\hat{I}M =$
$= 180^0 - \frac{\hat{B}}{4} - \left(90^0 - \frac{\hat{B}}{4} - \frac{\hat{C}}{4}\right) = 90^0 - \frac{\hat{C}}{4};$
$I\hat{M}C = 180^0 - I\hat{C}M - C\hat{I}M = 180^0 - \frac{\hat{C}}{4} - \left(90^0 - \frac{\hat{B}}{4} - \frac{\hat{C}}{4}\right) = 90^0 - \frac{\hat{B}}{4}.$

15. Se demonstrează că $\Delta ADC \equiv \Delta ABE$. Atunci
$m(B\hat{I}C) = m(I\hat{E}C) + m(I\hat{C}E) = 120^o.$

6. TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

1. Triunghiurile ABC și $A'BC$ sunt congruente.

2. AM este mediana corespunzătoare unghiului drept, de unde rezultă $AM = BM$. Triunghiurile ABN și MBN sunt congruente și atunci $AB = BM$. Rezultă deci că triunghiul ABM este echilateral.

4. Fie BB' bisectoarea unghiului $\hat{B}$, AM bisectoarea unghiului $D\hat{A}C$ și $\{I\} = AM \cap BB'$. Atunci avem:
$B\hat{A}I = B\hat{A}D + D\hat{A}M = (90^0 - \hat{B}) + \frac{1}{2}\cdot(90^0 - \hat{C}) = 135^0 - \hat{B} - \frac{1}{2}\hat{C}.$
$A\hat{I}B = 180^0 - B\hat{A}I - A\hat{B}I = 180^0 - (135^0 - \hat{B} - \frac{1}{2}\hat{C}) - \frac{1}{2}\hat{B} =$
$= 45^0 + \frac{1}{2}(\hat{C} + \hat{B}) = 45^0 + 45^0 = 90^0 \Rightarrow AM \perp BB'.$

9. [DE] este mediană în triunghiul dreptunghic ADB și atunci $ED = \frac{AB}{2} = AE$, de unde rezultă că $E\hat{D}A \equiv E\hat{A}D$. Analog $A\hat{D}F \equiv D\hat{A}F$ și atunci $E\hat{D}F \equiv B\hat{A}C$.

10. [ED] este mediană în triunghiul dreptunghic ABD, de unde rezultă că $ED = \frac{AB}{2}$. [FG] este linie mijlocie în triunghiul

ABC, de unde rezultă că $FG = \frac{AB}{2}$. Atunci $[DE] \equiv [FG]$.

12. $B\hat{E}C = 90^\bullet$ şi $[EO]$ este mediană în triunghiul BEC. Atunci $EO = \frac{BC}{2}$. Analog $DO = \frac{BC}{2}$ şi triunghiul OED este isoscel. Din triunghiul isoscel BOE avem : $E\hat{O}B = 180^\bullet - 2\cdot\hat{B}$. Analog $C\hat{O}D = 180^\bullet - 2\cdot\hat{C}$.

$D\hat{O}E = 180^\bullet - (180^\bullet - 2\cdot\hat{B}) - (180^\bullet - 2\cdot\hat{C}) =$

$= 2\cdot\hat{B} + 2\cdot\hat{C} - 180^\bullet = 180^o - 2\cdot\hat{A}$ => $O\hat{E}D = O\hat{D}E = \hat{A}$. Dacă $m(\hat{A}) = 60^o$ => ΔOED este echilateral.

14. Triunghiurile OAB, OBC, OCA sunt isoscele. Se calculează $m(O\hat{B}C) + m(O\hat{C}B)$ în funcţie de unghiurile triunghiului şi rezultă apoi $m(B\hat{O}C) = 2\cdot m(\hat{A})$.

16. $\Delta AD'D \equiv \Delta AD'E => ED' = DD' => ED = 2\cdot DD'$;

$\Delta AD''D \equiv \Delta AD''F => FD'' = DD'' => FD = 2\cdot DD''$.

Atunci triunghiul DEF este isoscel cu baza EF dacă $DE = DF => 2\cdot DD' = 2\cdot DD'' => DD' = DD'' => AD$ este bisectoarea unghiului $\hat{A}$.

18. Fie bisectoarea $[BD]$. Din D ducem $DM \perp BC$, $M \in [BC]$. Triunghiurile ABD şi MBD sunt congruente şi atunci rezultă $[AB] \equiv [BM]$. Însă $AB = \frac{BC}{2} => [BM] \equiv [CM]$ şi atunci triunghiul DBC este isoscel şi rezultă deci: $D\hat{B}C \equiv D\hat{C}B => m(\hat{C}) = \frac{1}{2}\cdot m(\hat{B})$.

Însă $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 90^o$, de unde $m(\hat{C}) = 30^o$.

19. Presupunem prin absurd că $m(\hat{A}) \neq 90^o$.

Ducem $BB' \perp AC$. Atunci $AB = BB'$, fals.

20. Fie D mijlocul lui (AC). Atunci triunghiul ADB este isoscel ($AB = AD$). Însă $\hat{A} = 60^\circ$ şi triunghiul ABD este echilateral. Triunghiul BDC este isoscel, unghiul $A\hat{D}B$ este exterior triunghiului BDC şi avem:

$A\hat{D}B = D\hat{B}C + D\hat{C}B => 60^o = 2\cdot D\hat{B}C => D\hat{B}C = 30^o =>$

$A\hat{B}C = A\hat{B}D + D\hat{B}C = 60^o + 30^o = 90^o$.

21. $B\hat{A}D = 180^o - A\hat{B}D - B\hat{D}A = 180^o - 60^o - 75^o =$

$= 45^o => B\hat{A}C = 2\cdot 45^o = 90^o => A\hat{C}B = 30^o => BC = 2\cdot AB$.

23. $m(\hat{B}) = 60^o \Rightarrow m(E\hat{B}C) = m(\hat{C}) = 30^o \Rightarrow [BE] \equiv [CE]$. $m(\hat{B}) = 60^o \Rightarrow m(A\hat{B}E) = 30^o \Rightarrow 2 \cdot AE = BE$. Atunci $CE = 2 \cdot AE$. Însă $AC = AE + EC \Rightarrow AC = 3 \cdot AE \Rightarrow AE = \frac{AC}{3}$, de unde $CE = \frac{2 \cdot AC}{3} \Rightarrow BE = \frac{2}{3} \cdot AC$.

25. În triunghiul dreptunghic AMA', $M\hat{A}A' = 30^0$, de unde rezultă că $AA' = 2 \cdot A'M$. În triunghiul dreptunghic MNA' avem: $A'\hat{M}N = 90^0 - M\hat{A}'N = 90^0 - 60^0 = 30^0$, de unde rezultă $A'M = 2 \cdot A'N$. Atunci $AA' = 2 \cdot A'M = A'M + 2 \cdot A'N$ şi $AA' + 2 \cdot A'N = 2 \cdot A'M + A'M = 3 \cdot A'M$.

26. Din triunghiul dreptunghic CMD avem: $C\hat{D}M = 90^0 \Rightarrow$ $\Rightarrow CM = 2 \cdot CD$ (1). $DE \perp AC \Rightarrow M\hat{E}B = 90^\bullet - D\hat{A}E = 30^\bullet$ şi cum $D\hat{M}C = 30^\bullet$ rezultă că triunghiul BEM este isoscel. Cum BF este mediană în acest triunghi rezultă că este şi înălţime şi deci $BF \perp ME$. $B\hat{M}F = 30^\bullet \Rightarrow MB = 2 \cdot BF$ (2). Adunând (1) cu (2) obţinem : $BM + CM = 2 \cdot BF + 2 \cdot CD \Rightarrow BC = 2 \cdot (CD + BF) \Rightarrow$ $\Rightarrow AB = 2 \cdot (CD + BF)$.

28. Fie $\{F\} = CB \cap DE$. Triunghiurile EAD şi BAC sunt congruente şi atunci $A\hat{E}D = A\hat{B}C \Rightarrow C\hat{E}F + E\hat{C}F =$ $= A\hat{B}C + A\hat{C}B = 90^0$, de unde rezultă că triunghiul CEF este dreptunghic în F. În triunghiul CDE avem: DA şi CF sunt înălţimi, de unde rezultă că EB este înălţime şi deci $EB \perp DC$.

30. Punctele D, H, C sunt coliniare şi atunci rezultă: $CH \perp AB$, $DH \perp AB$. Triunghiul DAB este isoscel şi atunci DH este mediană în acest triunghi. Rezultă atunci că CH este mediană în triunghiul ABC şi deci triunghiul ABC este isoscel ($CA = CB$). Analog $BA = BC$ şi deci triunghiul ABC este echilateral.

32. Deoarece triunghiul ABC este echilateral, iar D şi N sunt mijloacele laturilor BC şi respectiv AB, rezultă atunci că triunghiul BMN este isoscel. Cum $MBN = 120^0$, rezultă că $B\hat{M}N = 30^0$. Fie $\{Q\} = MP \cap AC$. Atunci avem: $M\hat{Q}C = 180^0 - Q\hat{M}C - M\hat{C}Q = 180^0 - 30^0 - 60^0 = 90^0 \Rightarrow$ $\Rightarrow MQ \perp AC$. Însă $AD \perp BC$. Rezultă atunci că $CP \perp AM$.

7. PATRULATERE

2. Se arată mai întâi că patrulaterul $ADFE$ este romb. $D\hat{A}E = D\hat{A}B - F\hat{A}B = 90^\bullet - 60^\bullet = 30^\bullet$.

Atunci $D\hat{A}E = D\hat{F}E = 30^\bullet$ şi $A\hat{D}F = A\hat{E}F = 150^\bullet$.

4. $E\hat{B}F = 360^\bullet - A\hat{B}E - A\hat{B}C - C\hat{B}F = 360^\bullet - 60^\bullet - 90^\bullet - 60^\bullet = 150^\bullet \Rightarrow B\hat{E}F + B\hat{F}E = 30^\bullet$.

$E\hat{M}F = 180^\bullet - M\hat{E}F - M\hat{F}E = 180^\bullet - (60^\bullet + B\hat{E}F) - (60^\bullet + B\hat{F}E) = 60^\bullet - (B\hat{E}F + B\hat{F}E) = 60^\bullet - 30^\bullet = 30^\bullet$.

7. $E\hat{B}F = 360^\bullet - A\hat{B}E - A\hat{B}C - C\hat{B}F = 360^\bullet - 60^\bullet - (180^\bullet - \hat{A}) - 60^\bullet = 60^\bullet + \hat{A}$. Atunci :

$\Delta BEF \equiv \Delta CDF \equiv \Delta AED \Rightarrow EF = ED = DF$.

8. $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = 180^o \Rightarrow \frac{m(\hat{A})}{2} + \frac{m(\hat{B})}{2} = 90^o$

9. „$\Rightarrow$“ Se arată că triunghiurile ADM şi BCM sunt isoscele.

10. Folosind **8.** se arată că $MNPQ$ este dreptunghi.

11. Se arată că $\Delta AMD \equiv \Delta BNC$ şi $\Delta ABM \equiv \Delta CDN$. Atunci $[DM] \equiv [BN]$ şi $[BM] \equiv [DN]$, de unde rezultă că patrulaterul $MBND$ este paralelogram.

12. $AM \perp BC$, $CD \perp BC \Rightarrow CD \| AM \Rightarrow AG \| CD$ (1). AM este mediană în triunghiul $ABC \Rightarrow AG = 2 \cdot GM$ (2). GM este linie mijlocie în triunghiul $BCD \Rightarrow CD = 2 \cdot GM$ (3). Din (2) şi (3) rezultă $AG = CD$ (5). Din (1) şi (5) obţinem că patrulaterul $AGCD$ este paralelogram.

13. $\Delta AIN \equiv \Delta A'IQ \Rightarrow [NI] \equiv [IQ]$. Analog $[IM] \equiv [IP]$.

16. Ducem $A'M \| AC$, $M \in [AB]$. Se arată că $A'M = A'A_1 = \frac{AC}{2} \Rightarrow [A'M] \equiv [A'A_1] \Rightarrow \Delta A'MA \equiv \Delta A'A_1A$.

17. Se demonstrează că înălţimea $[AD]$ este şi mediană în triunghiul ABE. Atunci triunghiul ABE este echilateral şi deci $m(\hat{B}) = 60^o$ şi $m(\hat{C}) = 30^o$.

19. Ducem $DQ \| CN$, $Q \in (AB) \Rightarrow DQ \| NP$ (1) şi $[BQ] \equiv [QN]$ (2). Din (1) rezultă $[AN] \equiv [NQ]$ (3). Din (2) şi (3) rezultă $\frac{NB}{NA} = 2$.

20. Fie F mijlocul lui $[EC]$. Atunci $[B'F]$ este linie mijlocie în triunghiul AEC, de unde rezultă că $B'F \| AE$. Fie

$\{G\} = AE \cap BB'$. Atunci $GE \| B'F$ şi E este mijlocul lui $[BF]$, de unde rezultă că $[GE]$ este linie mijlocie în triunghiul $BB'F$. Deci G este mijlocul lui $[BB']$.

21. În triunghiul ABC, $[EC]$ şi $[BM]$ sunt linii mijlocii corespunzătoare laturilor egale şi atunci $EC = BM$ (1). Triunghiul ACD este isoscel şi atunci $MD = CF$ (2). Din (1) şi (2) rezultă: $CE + CF = BM + MD = BD = 2 \cdot EF$.

22. a) $AD \perp BB' \Rightarrow \Delta ADB$ este dreptunghic în D, de unde $DC_1 = C_1B$. Atunci $C_1\hat{D}B \equiv C_1\hat{B}D$. Însă BB' este bisectoare şi atunci $DC_1 \| BC$.

b) $C_1D \| BC$ şi $C_1B_1 \| BC \Rightarrow D$, C_1, B_1 sunt coliniare.

23. Se foloseşte problema **22.**

24. În triunghiul BEF, D este ortocentrul şi atunci $DB \perp EF$.

27. $BN \| DM$, $BN = DM$ şi atunci $BNDM$ este paralelogram şi deci $BM \| DN$. Se observă că FN este linie mijlocie în triunghiul BCE şi ME este linie mijlocie în triunghiul ADF şi deci $[EF] \equiv [FC]$; $[AE] \equiv [EF] \Rightarrow [AE] \equiv [EF] \equiv [FC]$.

28. $\Delta AED \equiv \Delta CFB \Rightarrow A\hat{E}D \equiv B\hat{F}C \Rightarrow DE \| BF$. Atunci $EM \| BF$ şi E fiind mijlocul lui $[AF]$, rezultă că $[EM]$ este linie mijlocie în triunghiul ABF. Rezultă M este mijlocul lui $[AB]$. Analog N este mijlocul lui $[CD]$. Rezultă $AMND$ este paralelogram şi deci $MN \| AD$.

29. a) Se arată că patrulaterele AB_1A_1B şi CA_1C_1A sunt paralelograme. Atunci AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente în punctul O_2 care este mijlocul lor.

b) În triunghiul AO_1A_1 avem $[AA']$ şi $[O_1O_2]$ sunt mediane care se intersectează în G, de unde $GO_1 = 2 \cdot GO_2$.

30. a) $[MN]$, $[PQ]$ sunt linii mijlocii în triunghiurile ABC şi respectiv ACD, de unde rezultă că : $MN \| QP \| AC$ şi $MN = QP = \frac{AC}{2}$ şi deci $MNPQ$ este paralelogram.

b) $MN \| AC$, $NP \| BD$, $AC \perp BD \Rightarrow MN \perp NP \Rightarrow$
$\Rightarrow MNPQ$ este dreptunghi.

c) $MN = \frac{AC}{2}$; $NP = \frac{BD}{2}$; $AC = BD \Rightarrow MN = NP \Rightarrow$
$\Rightarrow MNPQ$ este romb.

d) $AC \perp BD$ şi $AC = BD \Rightarrow MNPQ$ este dreptunghi şi romb şi deci este pătrat.

31. Fie M, N, P, Q mijloacele segmentelelor $[DC], [AB], [DB]$ respectiv $[AC]$. Se demonstrează că $MPNQ$ este paralelogram, de unde rezultă că $[MN]$ şi $[QP]$ se taie în părţi egale.

Fie acum S şi T mijloacele laturilor $[AD]$, respectiv $[BC]$. Se demonstrează analog că $[ST]$ şi $[QP]$ se taie în părţi egale.

33. Se demonmstrează că $CD \parallel MP$ şi $MP = 2 \cdot CD$.

34. Fie $BB_1 \perp AA'$, $B_1 \in AC$. Se arată că D este mijlocul segmentului $[CB_1]$. Fie $DT \perp AA'$, unde $T \in AB$. Atunci $DT \parallel BB_1$, deci DT este linie mijlocie în triunghiul BB_1C şi trece prin mijlocul lui $[BC]$.

35. Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Triunghiurile AMD şi CPB sunt congruente şi atunci $[DM] \equiv [BP] \Rightarrow [MO] \equiv [PO]$. Analog avem $[ON] \equiv [OQ]$ şi atunci $MNPQ$ este paralelogram.

36. Fie $M' \in AB$, $N' \in CD$, $P' \in DA$, $R' \in BC$ astfel încât MM', NN', PP', RR' sunt mediatoarele segmentelor AB, CD, DA, BC. Evident patrulaterele $MN'NM'$ şi $PP'RR'$ sunt paralelograme, de unde rezultă că MN şi PR trec prin $\{O\} = AC \cap BD$ şi se taie în părţi egale.

37. Se arată că patrulaterele AA_2CC_2 şi AA_1CC_1 sunt dreptunghiuri.

38. Se arată că diagonalele se înjumătăţesc.

39. Se demonstrează că laturile opuse sunt congruente.

40. Se foloseşte congruenţa triunghiurilor ABC şi MBN; ADC şi QDP; BCD şi NCP; DAB şi QAM.

41. $[AC$ este bisectoare $\Leftrightarrow D\hat{A}C \equiv C\hat{A}B$. Însă $C\hat{A}B \equiv A\hat{C}D$ şi atunci rezultă: $D\hat{A}C \equiv A\hat{C}D \Leftrightarrow [AD] = [DC]$.

42. Se foloseşte problema **41**.

47. Se folosesc proprietăţile liniei mijlocii în triunghi.

48. $EF = \dfrac{a-b}{2}$.

49. Se studiază cazurile $AB > CD$ şi $AB < CD$

50. Se arată că $A'B = MN = \dfrac{AD-BC}{2}$.

51. a) Se arată mai întâi că $m(A\hat{E}D) = 90^o$. Deoarece $[EM]$ este mediană rezultă că $EM = AM$ şi apoi $ME \parallel AB$.

b) $ME \parallel AB, MN \parallel AB \Rightarrow E, M, N$ sunt coliniare.

52. Fie $[EF]$ linia mijlocie şi $[GH]$ înălţimea trapezului care trece prin intersecţia O a diagonalelor. Atunci $EF = \frac{AB + CD}{2}$. În triunghiul dreptunghic AOB, $[OG]$ este linie mijlocie şi deci: $OG = \frac{AB}{2}$. Analog $OH = \frac{CD}{2}$. Atunci: $HG = OG + OH =$

$= \frac{AB + CD}{2} = EF.$

53. Ducem $EE' \perp d$ şi $FF' \perp d$. Atunci $EE' = \frac{AM + BN}{2}$, de unde rezultă $AM + BN = 2 \cdot EE'$ (1).

În trapezul $CDQP$, $[FF']$ este linie mijlocie, de unde rezultă $CP + DQ = 2 \cdot FF'$ (2). $\Delta GFF' \equiv \Delta GEE' \Rightarrow [EE'] \equiv [FF']$ (3). Din (1), (2), (3) rezultă $AM + BN = CP + DQ$.

54. În trapezul $ADNM$: $EF = \frac{DN - AM}{2} =$

$= \frac{(DC - NC) - (AB - MB)}{2} = \frac{MB - NC}{2} = GH \Rightarrow \frac{EF}{GH} = 1.$

55. Ducem prin A paralela la BC, $MM' \perp BC$, $NN' \perp BC$, $PP' \perp BC$. Prelungirea lui MM' intersectează dreapta d în M_1. Atunci $NN' = MM_1 \Rightarrow MM' + NN' = M'M_1 = h_a$.

$PP' = \frac{NN' + MM'}{2} = \frac{h_a}{2}.$

57. Se arată că triunghiurile OA_1A_2 şi OB_1B_2 sunt isoscele, de unde $m(\hat{OA_1A_2}) = \frac{180^\circ - m(\hat{XOY})}{2}$ (1) şi

$m(\hat{OB_1B_2}) = \frac{180^\circ - m(\hat{XOY})}{2}$ (2).

Din (1) şi (2) rezultă $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ şi cum $[A_1B_1] \equiv [A_2B_2]$, rezultă că $A_1B_1B_2A_2$ este trapez isoscel.

59. $\Delta CBA \equiv \Delta CFE \Rightarrow [BA] \equiv [FE] \equiv [AD]$. Analog se demonstrează că $[DF] \equiv [AE]$. Deci $AEFD$ este paralelogram.

60. Fie $\{F\} = BC \cap DE$. Ducem $DG \parallel CE$. Triunghiul DGB este isoscel, de unde $[DG] \equiv [DB]$. Însă $[DB] \equiv [CE]$ şi atunci $[DG] \equiv [CE]$. Însă $DG \parallel CE$ şi deci patrulaterul $DGEC$ este paralelogram. Rezultă F este mijlocul lui $[DE]$.

8. ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

3. $MN \| AC \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{NB}{NC} \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{NC}{NB}$ (1)

$NP \| AB \Rightarrow \frac{NC}{NB} = \frac{PC}{PA}$ (2). Din (1) şi (2) $\frac{MA}{MB} = \frac{PC}{PA}$.

4. a) $MN \| AC \Rightarrow \frac{BN}{AB} = \frac{BM}{BC}$; $MP \| AB \Rightarrow \frac{CP}{AC} = \frac{CM}{BC}$.

Se adună membru cu membru relaţiile.

b) Se scad membru cu membru cele două relaţii de la a).

5. $MN \| AC \Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{CM}{BC}$; $MP \| AB \Rightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{MB}{BC} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AN}{AB} + \frac{AP}{AC} = 1.$

„$\Rightarrow$“ Evident $AB = AC \Rightarrow AN + AP = AB$.

„$\Leftarrow$“ $AN + AP = AB \Rightarrow AN = AB - AP \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AB - AP}{AB} + \frac{AP}{AC} = 1 \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{AP}{AC} \Rightarrow AB = AC.$

7. a) $MN \| AD \Rightarrow \frac{NC}{ND} = \frac{MC}{MA}$; $MP \| BC \Rightarrow \frac{PB}{PA} = \frac{MC}{MA} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{NC}{ND} = \frac{PB}{PA} \Rightarrow NC \cdot PA = ND \cdot PB$.

b) $NM \| AD \Rightarrow \frac{ND}{DC} = \frac{MA}{AC}$; $MP \| BC \Rightarrow \frac{BP}{AB} = \frac{MC}{AC} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{ND}{DC} + \frac{BP}{AB} = 1 \Rightarrow ND \cdot AB + BP \cdot CD = AB \cdot CD.$

9. Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Atunci avem:

$MP \| OB \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AO} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{2 \cdot AP}{AC}$ (1)

$MN \| OA \Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{BN}{BO} \Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{2 \cdot BN}{BD}$ (2)

Adunând membru cu membru (1) cu (2) obţinem:

$\frac{2 \cdot AP}{AC} + \frac{2 \cdot BN}{BD} = \frac{AM}{AB} + \frac{BM}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1 \Rightarrow \frac{AP}{AC} + \frac{BN}{BD} = \frac{1}{2}.$

10. $MN \| BC \Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow AN = \frac{AB}{3}$

$MP \| AB \Rightarrow \frac{CP}{BC} = \frac{MC}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow CP = \frac{2 \cdot BC}{3} = \frac{AB}{3}$.

11. Fie $\{T\} = PQ \cap BC$. $PT \| AD \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{DT}{BD}$ (1)

$QT \| AD \Rightarrow \frac{AQ}{AC} = \frac{DT}{CD}$ (2). Din (1) și (2) rezultă:

$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} \Rightarrow \frac{AP}{AQ} = \frac{AB}{AC}$.

13. Se aplică teorema bisectoarei și apoi se folosesc rapoarte derivate.

14. Ducem $BE \| AD, E \in AC \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = AE \Rightarrow A\hat{B}E \equiv A\hat{E}B$ (1)

$BE \| AD \Rightarrow A\hat{B}E \equiv B\hat{A}D$ (2). Însă $A\hat{E}B \equiv D\hat{A}C$ (3).

Din (1), (2), (3) rezultă $B\hat{A}D \equiv C\hat{A}D$.

15. Se duce $BE \| AD, E \in AC$.

16. La fel ca la **13.**

17. Ducem $BM \| AE, M \in (AC)$ și $BN \| AD, N \in AC$.

$BM \| AE \Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{AM}{AC}$ (1); $AD \| BN \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AN}{AC}$ (2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow AM = AN = AB \Rightarrow$

$\Rightarrow B\hat{A}D \equiv A\hat{B}N \equiv A\hat{N}B \equiv D\hat{A}C$.

18. [MN bisectoare în $\Delta MAB \Rightarrow \frac{NA}{NB} = \frac{MA}{MB}$ (1)

[MP bisectoare în $\Delta MAC \Rightarrow \frac{PC}{PA} = \frac{MC}{MA}$ (2)

Cum $MB = MC \Rightarrow \frac{NA}{NB} = \frac{PA}{PC} \Rightarrow \frac{NA}{AB} = \frac{PA}{AC} \Rightarrow \frac{AN}{AP} = \frac{AB}{AC}$.

19. În ΔDAB, [DE este bisectoare $\Rightarrow \frac{BE}{AE} = \frac{BD}{AD}$ (1).

În ΔDAC, [DF este bisectoare $\Rightarrow \frac{FA}{FC} = \frac{AD}{CD}$ (2).

Înmulțind membru cu membru (1) cu (2) obținem:
$\frac{BE}{AE}\cdot\frac{AF}{CF}=\frac{BD}{CD}$ (3). Însă [AD este bisectoare în ΔABC, de unde
$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$ (4). Din (3) și (4) => $\frac{BE}{AE}\cdot\frac{AF}{CF}=\frac{AB}{AC}$.

20. $[AD]$ este înălțime și bisectoare în ΔABM => $AB=AM$ (1) și $BD=DM$ (2). În ΔADC, [AM este bisectoare, de unde $\frac{DM}{MC}=\frac{AD}{AC}$ (3). Din (2) => $DM=\frac{BM}{2}=\frac{CM}{2}$ (4)
Din (3) și (4) => $\frac{AD}{AC}=\frac{1}{2}$ => $m(\hat{C})=30^o$ => $m(D\hat{A}C)=60^o$.
Atunci $m(\hat{A})=90^o$ și $m(\hat{B})=60^o$.

21. Se aplică teorema bisectoarei în triunghiul ABD și apoi se folosește rezultatul de la problema **13**.

24. Fie $MP \parallel CD$, $P\in[AB]$ și $MQ \parallel BE$, $Q\in[AC]$.
MP este linie mijlocie în ΔBCD => $PB=PD$ (1). Analog demonstrăm că $QC=QE$ (2).
$TE \parallel MQ$ => $\frac{AE}{EQ}=\frac{AT}{TM}$ (3) ; $DT \parallel PM$ => $\frac{AD}{DP}=\frac{AT}{TM}$ (4).
Din (3) și (4) => $\frac{AE}{EQ}=\frac{AD}{DP}$ => $\frac{AE}{2\cdot EQ}=\frac{AD}{2\cdot DP}$ =>
=> $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$ => $DE \parallel BC$

29. $MN \parallel AD$ => $\frac{CN}{CD}=\frac{CM}{CA}$ (1);
$MP \parallel AB$ => $\frac{CP}{CB}=\frac{CM}{CA}$ (2). Din (1) și (2) rezultă
$\frac{CN}{CD}=\frac{CP}{CB}$ => $NP \parallel BD$.

30. „=>“ $BP\perp AQ$, $AA'\perp BQ$ => $QP\perp AB$.
Însă $AC\perp AB$, de unde rezultă $QP \parallel AC$ => $\frac{AP}{PA'}=\frac{CQ}{QA'}$.
„<=“ $\frac{AP}{A'P}=\frac{CQ}{A'Q}$ => $PQ \parallel AC$. Însă $AC\perp AB$ =>
=> $QP\perp AB$ și cum $AA'\perp BQ$ => $BP\perp AQ$.

32. $DE \parallel AB \Rightarrow \frac{DC}{DB} = \frac{EC}{EA}$ (1); $EF \parallel BC \Rightarrow \frac{EC}{EA} = \frac{FB}{FA}$ (2) $FG \parallel AC \Rightarrow \frac{FB}{FA} = \frac{GB}{GC}$ (3). Din (1), (2), (3) $\Rightarrow \frac{DC}{DB} =$; $= \frac{GB}{GC}$ (4). Dacă D este mijlocul lui $[BC] \Rightarrow \frac{GB}{GC} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow G = D$. Din (4) $\Rightarrow \frac{DC}{BC} = \frac{GB}{BC} \Rightarrow DC = GB$ (5).

Continuăm din B construcţia şi se întoarcem în $D_1 \in (BC) \Rightarrow$ $GB = D_1C$ (6). Din (5) şi (6) $\Rightarrow CD = CD_1 \Rightarrow D = D_1$.

38. „$\Rightarrow$“ $\Delta APR \sim \Delta ABM \Rightarrow \frac{PR}{BM} = \frac{AP}{AB}$ (1)

$\Delta APQ \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$ (2)

$\Delta ARQ \sim \Delta AMC \Rightarrow \frac{RQ}{MC} = \frac{AQ}{AC}$ (3)

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow \frac{PR}{BM} = \frac{RQ}{CM} \Rightarrow PR = RQ$.

39. a) $\Delta A'AC \sim \Delta B'BC \Rightarrow \frac{A'C}{B'C} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow$

$\Rightarrow A'C \cdot BC = B'C \cdot AC$.

b) $\Delta HAB' \sim \Delta HBA' \Rightarrow \frac{HB'}{HA'} = \frac{HA}{HB} \Rightarrow HA \cdot HA' = HB \cdot HB'$.

c) $\Delta AHB' \sim \Delta ACA' \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AB'}{AA'} \Rightarrow AA' \cdot AH = AC \cdot AB'$.

d) $\Delta A'BH \sim \Delta A'AC \Rightarrow \frac{A'B}{AA'} = \frac{HA'}{A'C} \Rightarrow A'B \cdot A'C = A'H \cdot AA'$.

40. $\Delta DAC \sim \Delta DBH \Rightarrow \frac{DC}{HD} = \frac{AD}{BD} = 2 \Rightarrow DC = 2 \cdot HD \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AD}{2} = 2 \cdot HD \Rightarrow HD = \frac{AD}{4} \Rightarrow AH = 3 \cdot \frac{AD}{4} \Rightarrow \frac{AH}{HD} = 3$.

41. $HA' = \frac{A'B \cdot A'C}{AA'} \Rightarrow \frac{HA'}{A'B} = \frac{A'C}{AA'} \Rightarrow \Delta A'HC \sim \Delta A'BA$.

Atunci $A'\hat{C}H \equiv A'\hat{A}B \Rightarrow m(A'\hat{C}H) = 90^o - m(\hat{B}) \Rightarrow CH \perp AB$.

42. $\Delta EAD \sim \Delta DAC \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{DE}{DC} \Rightarrow AE \cdot AB = AD \cdot DE$.

43. $\Delta DAE \sim \Delta BFA \Rightarrow \frac{AD}{FB} = \frac{DE}{AB} \Rightarrow AB \cdot AD = BF \cdot DE.$

44. $\Delta ADB \sim \Delta BAF \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{BF}.$

45. $AB \parallel CD \Rightarrow \Delta DCB \sim \Delta CBA \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{DC}{BC} \Rightarrow$

$\Rightarrow BC^2 = AB \cdot CD.$

46. $\Delta BOA \sim \Delta COB \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OC} \Rightarrow OB^2 = OA \cdot OC.$

47. $AC \parallel BD \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$; $BC \parallel DE \Rightarrow \frac{OB}{OE} = \frac{OC}{OD} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OE} \Rightarrow OB^2 = OA \cdot OE.$

48. $ND = MB \Rightarrow MBND$ este paralelogram $\Rightarrow DM \parallel NB.$

Atunci $RM \parallel SB \Rightarrow \frac{AR}{RS} = \frac{AM}{MB} = 2 \Rightarrow AR = 2 \cdot RS.$

Analog $SC = 2 \cdot RS$ şi atunci $AC = 5 \cdot RS.$

49. $\Delta NPC \sim \Delta MBQ \Rightarrow \frac{NC}{QM} = \frac{NP}{BM} \Rightarrow MB \cdot NC = MN^2.$

$\Delta NPC \sim \Delta AQP \Rightarrow \frac{NP}{QA} = \frac{PC}{QP} \Rightarrow PC \cdot QA = MN^2.$

$\Delta AQP \sim \Delta MBQ \Rightarrow \frac{QP}{BQ} = \frac{AP}{QM} \Rightarrow BQ \cdot PA = MN^2.$

50. Notăm $MN = x$. $\Delta AQP \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{QP}{BC} = \frac{AP}{AC} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{x}{a}$ (1). $\Delta CPN \sim \Delta CAD \Rightarrow \frac{PN}{AD} = \frac{CP}{CA} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{PC}{AC} = \frac{x}{d}$ (2). Adunând (1) cu (2) obţinem $x = \frac{ad}{a+d}.$

54. Fie $AA_1 \perp MN$, $AA_2 \perp BD$, $CC_1 \perp RP$, $CC_2 \perp BD$. Se demonstrează că $[AA_2] \equiv [CC_2]$ şi cum $[A_1A_2] \equiv [C_1C_2] \Rightarrow$ $\Rightarrow [AA_1] \equiv [CC_1]$. Din asemănări de triunghiuri se obţine: $\frac{MN}{DB} = \frac{RP}{DB} \Rightarrow [MN] \equiv [RP] \Rightarrow MNPR$ paralelogram.

55. $AD \parallel BP \Rightarrow \Delta QAD \sim \Delta QPB \Rightarrow \frac{QA}{QP} = \frac{QD}{QB}$ (1).

$AB \parallel DN \Rightarrow \Delta QAB \sim \Delta QND \Rightarrow \frac{QN}{QA} = \frac{QD}{QB}$ (2).

Din (1) şi (2) $\Rightarrow \frac{QA}{QP} = \frac{QN}{QA} \Rightarrow QA^2 = QN \cdot QP$.

56. a) $A\hat{B}E \equiv C\hat{G}B$; $A\hat{E}B \equiv C\hat{B}G \Rightarrow \Delta ABE \sim \Delta CGB$ (1).

b) Analog $\Delta CDF \sim \Delta HBC$ (2).

(1) $\Rightarrow \frac{AE}{BC} = \frac{AB}{CG} \Rightarrow AE \cdot CG = AB \cdot BC$ (3)

(2) $\Rightarrow \frac{DF}{BC} = \frac{CD}{HB} \Rightarrow DF \cdot BH = AB \cdot BC$ (4)

Din (3) şi (4) $\Rightarrow AE \cdot CG = DF \cdot BH$.

57. $CM \parallel OB \Rightarrow \Delta OCM$ este echilateral $\Rightarrow CM = OC$(1).

$\Delta ACM \sim \Delta ABO \Rightarrow \frac{CM}{OB} = \frac{AM}{OA}$ (2).

$AM = OA - OM \Rightarrow AM = OA - OC$ (3)

Din (1), (2) şi (3) rezultă $\frac{OC}{OB} = \frac{OA - OC}{OA} \Rightarrow \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{OC}$.

58. $\frac{CC_1}{AA_1} = \frac{BC_1}{BA}$; $\frac{CC_1}{BB_1} = \frac{AC_1}{AB} \Rightarrow \frac{CC_1}{AA_1} + \frac{CC_1}{BB_1} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} = \frac{1}{CC_1}$.

Dacă $C_1 \notin [AB \Rightarrow \frac{1}{AA_1} = \frac{1}{BB_1} + \frac{1}{CC_1}$.

Dacă $C_1 \notin [BA \Rightarrow \frac{1}{BB_1} = \frac{1}{AA_1} + \frac{1}{CC_1}$.

59. $\Delta EAB \sim \Delta EFC \Rightarrow \frac{a}{CF} = \frac{AE}{EF}$; $\Delta FAD \sim \Delta FEC \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a}{CE} = \frac{AF}{EF}$. Prin adunare rezultă $\frac{a}{CE} + \frac{a}{CF} = 1$.

60. $\Delta DMO \sim \Delta DAB \Rightarrow \frac{MO}{AB} = \frac{OD}{DB}$ (1).

$\Delta AMO \sim \Delta ADC \Rightarrow \frac{OM}{DC} = \frac{OA}{AC}$ (2).

$\Delta OAB \sim \Delta OCD \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow \frac{OA}{AC} = \frac{OB}{DB}$ (3)

Din (1), (2), (3) => $OM = \frac{ab}{a+b}$, $MN = \frac{2ab}{a+b}$.

61. a) $\Delta AMT \sim \Delta ADC \Rightarrow \frac{MT}{b} = \frac{AT}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow MT = \frac{2b}{3}$.

$\Delta CNT \sim \Delta CAB \Rightarrow \frac{NT}{a} = \frac{CT}{AC} \Rightarrow \frac{NT}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow NT = \frac{a}{3}$.

Atunci $MN = MT + NT = \frac{a+2b}{3}$.

b) Analog ca la punctul a) obținem: $MN = \frac{bk+a}{k+1}$.

62. $\Delta OBC \sim \Delta ODA \Rightarrow \frac{OB}{OD} = \frac{BC}{AD} \Rightarrow \frac{BD}{OD} = \frac{BC+AD}{AD}$.

$\Delta OBC \sim \Delta ODA \Rightarrow \frac{OC}{OA} = \frac{BC}{AD} \Rightarrow \frac{OC}{AC} = \frac{BC}{AD+BC}$.

Prin înmulțire obținem: $\frac{BD}{OD} \cdot \frac{OC}{AC} = \frac{BC}{AD} \Rightarrow \frac{AD}{BC} \cdot \frac{BD}{AC} = \frac{OD}{OC}$.

63. a) În trapezul $BCC'B'$ avem OA linie mijlocie, de unde rezultă $BB' + CC' = 2 \cdot OA = BC$.

b) $\Delta B'AB \sim \Delta C'CA \Rightarrow \frac{BB'}{AC'} = \frac{AB'}{CC'} \Rightarrow$

$\Rightarrow BB' \cdot CC' = AB' \cdot AC' = \frac{B'C'}{2} \cdot \frac{B'C'}{2} = \frac{B'C'^2}{4}$.

9. RELAȚII METRICE

10. Dacă $m(\hat{B}) < 90^\circ$, atunci perimetrul este $7 + \sqrt{41}$.

Dacă $m(\hat{B}) > 90^\circ$, atunci perimetrul este $23 + \sqrt{137}$.

14. $BC = \sqrt{a^2 + b^2}$. Aplicând teorema catetei în triunghiul ABC obținem: $AB^2 = BC \cdot A'B$; $AC^2 = BC \cdot A'C \Rightarrow$

$\Rightarrow A'B = \frac{AB^2}{BC} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $A'C = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Scriind aria triunghiului în două moduri obținem:

$AA' \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AA' = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

18. $AD^2 = BD \cdot DC \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{DC}{AD} \Rightarrow \Delta DAB \sim \Delta DCA \Rightarrow$
$\Rightarrow m(B\hat{A}D) = m(D\hat{C}A)$ şi $m(D\hat{A}C) = m(A\hat{B}D) \Rightarrow$
$\Rightarrow m(B\hat{A}C) = m(A\hat{B}C) + m(B\hat{C}A) = 90^o$.

19. a) Dacă $m(\hat{B}) > 90^o$, atunci $AD^2 = BD \cdot DC \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta DAB \sim \Delta DCA \Rightarrow m(D\hat{A}B) = m(D\hat{C}A)$.
Însă $m(D\hat{A}B) = m(\hat{B}) - 90^o = m(\hat{C}) \Rightarrow m(\hat{B}) - m(\hat{C}) = 90^o$.
b) Dacă $m(\hat{C}) > 90^o$ se demonstrează că $m(\hat{C}) - m(\hat{B}) = 90^o$.

20. $AB^2 = BD \cdot BC \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \Delta DAB \sim \Delta ACB \Rightarrow$
$\Rightarrow m(A\hat{D}B) = m(C\hat{A}B) \Rightarrow m(\hat{A}) = 90^o$.

21. $AB^2 = BD \cdot BC \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \Delta DAB \sim \Delta ACB \Rightarrow$
$\Rightarrow m(B\hat{D}A) = m(B\hat{A}C)$. $AC^2 = CD \cdot CB \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{CB}{AC} \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta DAC \sim \Delta ABC \Rightarrow m(A\hat{D}C) = m(B\hat{A}C)$. Atunci $m(B\hat{D}A) = m(A\hat{D}C) = 90^o \Rightarrow m(B\hat{A}C) = 90^o$.

22. Aplicând teorema catetei obţinem: $AB^2 = BD \cdot BC$ şi $AC^2 = DC \cdot BC \Rightarrow BD = \frac{AB^2}{BC}$ şi $CD = \frac{AC^2}{BC}$. Folosind teorema înălţimii obţinem: $AD^2 = \frac{AB^2 \cdot AC^2}{BC^2} \Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC}{BC}$.

23. Presupunem că $m(\hat{A}) \neq 90^o$. Fie $E = pr_{AC} B$. Atunci $E \neq A$. Avem $AD \cdot BC = BE \cdot AC$ şi $AD \cdot BC = AB \cdot AC$, de unde $AC \cdot BE = AB \cdot AC \Rightarrow BA = BE$, fals. Deci $m(\hat{A}) = 90^o$.

24. „$\Rightarrow$" $AB^2 - BD^2 = AD^2$ şi $AC^2 - CD^2 = AD^2$.
„$\Leftarrow$" $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 \Rightarrow AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$.
Presupunem prin absurd că AD nu este perpendicular pe BC. Ducem $AD' \perp BC \Rightarrow AB^2 - AC^2 = BD'^2 - CD'^2$. Atunci $BD^2 - CD^2 = BD'^2 - CD'^2$ şi se demonstrează că $D = D'$.

25. a) Din triunghiurile dreptunghice ABE şi ACF avem:
$AE^2 = AB^2 + BE^2 = AD^2 + BD^2 + BE^2 = AD^2 + BD^2 + CD^2$

$AF^2 = AC^2 + CF^2 = AD^2 + DC^2 + CF^2 = AD^2 + BD^2 + CD^2$.
Rezultă că $AE^2 = AF^2 \Rightarrow AE = AF$.
b) Aplicând teorema catetei în triunghiurile dreptunghice ABE și ACF obținem $AB' = \frac{AB^2}{AE}$ și $AC' = \frac{AC^2}{AF}$.

26. "=>" $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{AB^2 \cdot AC^2} = \frac{BC^2}{BC^2 \cdot AD^2} = \frac{1}{AD^2}$.
„<=" Fie ABC un triunghi în care: $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.
Fie $C' \in BC$ astfel încât triunghiul ABC' să fie dreptunghic în A. Atunci : $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC'^2}$. Din cele două relații rezultă că $AC = AC'$ deci punctele C și C' coincid.

27. Din triunghiul dreptunghic BEC, $BC^2 = BE^2 + EC^2$.
Din triunghiurile dreptunghice BME și CNE obținem:
$BE^2 = BM^2 + ME^2$ și $EC^2 = EN^2 + NC^2$.

28. $\Delta CMN \sim \Delta CBA \Rightarrow \frac{MC}{BC} = \frac{NC}{AC} \Rightarrow MC \cdot AC = BC \cdot NC$
Deci $MC(AM + MC) = NC(BN + NC) \Rightarrow MC^2 - NC^2 =$
$= NB \cdot NC - MA \cdot MC \Rightarrow MN^2 = NB \cdot NC - MA \cdot MC$.

29. Din triunghiurile dreptunghice BAD și BCD avem:
$BD^2 = AB^2 + AD^2$ și $BD^2 = BC^2 + CD^2$ de unde rezultă:
$AB^2 + AD^2 = BC^2 + CD^2$.

30. Fie $\{O\} = AC \cap BD$. $AD^2 + BC^2 = (AO^2 + OD^2) +$
$+ (BO^2 + CO^2) = (AO^2 + BO^2) + (CO^2 + DO^2) = AB^2 + CD^2$.

32. Din triunghiul dreptunghic ACD avem:
$AC^2 = AD^2 + DC^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = AB^2 + AD^2 + CD^2$.
Din triunghiul dreptunghic ABD avem:
$BD^2 = AB^2 + AD^2 \Rightarrow BD^2 + CD^2 = AB^2 + AD^2 + CD^2$.
Atunci rezultă $AB^2 + AC^2 = BD^2 + CD^2$.

33. Ducem $CC' \perp AB$ de unde rezultă $CC' = AD$ şi $C'B = AB - CD$. Din triunghiul dreptunghic $CC'B$ avem: $BC^2 = BC'^2 + CC'^2 \Rightarrow BC^2 = (AB - CD)^2 + AD^2 \Rightarrow$ $BC^2 - AD^2 = (AB - CD)^2$.

34. a) Aplicând teorema catetei în triunghiul dreptunghic ACB obţinem: $AC^2 = AB \cdot AC' = AB \cdot CD$.

b) Aplicând teorema catetei în triunghiul dreptunghic ACB obţinem: $BC^2 = AB \cdot BC' = AB(AB - CD) \Rightarrow$ $\Rightarrow BC^2 + AB \cdot CD = AB^2$.

c) Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice ACB şi ADC obţinem:
$AB^2 = AC^2 + BC^2 = AD^2 + CD^2 + BC^2$.

35. a) Aplicând teorema catetei în triunghiul OAB obţinem: $OA^2 = AM \cdot AB$ şi $OB^2 = MB \cdot AB$, de unde $\frac{AM}{MB} = \frac{OA^2}{OB^2}$. Analog $\frac{BN}{CN} = \frac{OB^2}{OC^2}$; $\frac{CP}{DP} = \frac{OC^2}{OD^2}$; $\frac{DQ}{AQ} = \frac{OD^2}{OA^2}$. În continuare se înmulţesc membru cu membru cele patru relaţii.

b) $\frac{OA}{OB} + \frac{OB}{OA} = \frac{OA^2 + OB^2}{OA \cdot OB} = \frac{AB^2}{OA \cdot OB} = \frac{AB^2}{AB \cdot OM} = \frac{AB}{OM}$.

36. „$\Rightarrow$" Prin D ducem $DE \parallel AC$, $E \in AB \Rightarrow DE \perp DB$ şi conform teoremei înălţimii $AD^2 = AE \cdot AB$. Cum $AEDC$ este paralelogram, rezultă $AE = DC$. Atunci $AD^2 = AB \cdot DC$.

„$\Leftarrow$" Prin D ducem $DE \perp DB$, $E \in AB$. Aplicând teorema înălţimii în triunghiul BDE obţinem $AD^2 = AE \cdot AB$.

Însă $AD^2 = AB \cdot CD$ şi atunci $AE = DC$ şi $AEDC$ este paralelogram. Rezultă $DE \parallel AC$ şi apoi $AC \perp DB$.

37. Construim $DE \parallel AC$, $E \in AB$. Atunci $DE \perp DB$ şi aplicând teorema catetei în triunghiul EDB, găsim :

$$DE^2 = EA \cdot EB;\ DB^2 = AB \cdot BE \quad (1).$$

Cum $EACD$ este paralelogram, rezultă $AC = DE$ şi

$AE = DC$. Atunci $\frac{DE^2}{DB^2} = \frac{EA \cdot EB}{AB \cdot BE} =>$

$=> \frac{AC^2}{BD^2} = \frac{DC \cdot EB}{AB \cdot EB} => \frac{AC^2}{BD^2} = \frac{DC}{AB} => \frac{AC}{BD} = \frac{1}{\sqrt{k}}$.

38. Fie $\{O\} = AC \cap BD$, M, N, P mijloacele laturilor $[AD]$, $[BC]$, $[CD]$. $AC \perp BD => MP \perp NP$.

Triunghiul MNP este dreptunghic în P, iar MN este linie mijlocie în trapez, MP şi NP linii mijlocii în triunghiurile ACD şi BCD. Atunci $MP^2 + NP^2 = MN^2$, $MP = \frac{AC}{2}$, $NP = \frac{BD}{2}$, $MN = \frac{AB + CD}{2}$. Rezultă $AC^2 + BD^2 = (AB + CD)^2$.

39. a) Patrulaterul $AEDF$ este dreptunghi. Atunci:

$$AE^2 + AF^2 = EF^2 = AD^2.$$

b) Patrulaterul $AEDF$ este dreptunghi şi deci $EF = AD$. Din ΔEDF avem: $EF^2 = ED^2 + FD^2$. Aplicând teorema înălţimii în triunghiurile dreptunghice ABD şi ACD rezultă:

$ED^2 = AE \cdot EB$ şi $FD^2 = AF \cdot CF$. Atunci avem:

$AD^2 = AE \cdot BE + AF \cdot FC$.

40. a) Aplicând teorema catetei în triunghiul BED, rezultă $ED^2 = BD \cdot GD$. Însă $AD \cdot BD = AB \cdot ED$, de unde

$\frac{AD^2 \cdot BD^2}{AB^2} = ED^2 = BD \cdot GD => \frac{AD^2 \cdot BD^2}{BC \cdot BD} = BD \cdot GD =>$

$=> GD = \frac{AD^2}{BC}$. Analog $DH = \frac{AD^2}{BC}$. $\Delta GDE \sim \Delta HFD =>$

$\frac{GD}{FH} = \frac{EG}{DH} => GD \cdot DH = EG \cdot FH => GD^2 = EG \cdot FH$.

b) Dacă G, H sunt mijloacele segmentelor $[BD]$ şi respectiv $[DC]$, atunci $2 \cdot GH = BC => 4 \cdot GD = BC => 4 \cdot \frac{AD^2}{BC} = BC =>$

$=> 2 \cdot AD = BC => AD$ este mediană şi deci triunghiul ABC este isoscel, adică $AB = AC$. Reciproca este evidentă.

10. CERCUL

1. [BE este bisectoarea unghiului $A\hat{B}D$ <=> $A\hat{B}E \equiv E\hat{B}D$ <=> arc (AE) = arc (DE) <=> $A\hat{C}E \equiv E\hat{C}D$ <=> [CE este bisectoarea unghiului $A\hat{C}D$.

2. Punctele M, N sunt mijloacele celor două arce AB.

3. $A\hat{F}G = \frac{\text{arc}(AE) + \text{arc}(DB)}{2} = \frac{\text{arc}(AB)}{4} + \frac{\text{arc}(AC)}{4}$

$A\hat{G}F = \frac{\text{arc}(AD) + \text{arc}(CE)}{2} = \frac{\text{arc}(AB)}{4} + \frac{\text{arc}(AC)}{4}$.

Atunci $A\hat{F}G \equiv A\hat{G}F$, deci triunghiul AFG este isoscel şi cum $m(\hat{A}) = 60^o$, rezultă că triunghiul AFG este echilateral.

4. $\Delta AOD \equiv \Delta BOC$ => $[AD] \equiv [BC]$. Analog $[AC] \equiv [BD]$. Atunci rezultă că patrulaterul $ACBD$ este paralelogram. Cum $m(A\hat{C}B) = 90^\circ$ ca unghi înscris într-un semicerc, rezultă că patrulaterul $ACBD$ este dreptunghi.

Patrulaterul $ACBD$ devine pătrat dacă $AB \perp CD$.

5. $m(B\hat{D}C) = 180^o - m(\hat{A}) = m(\hat{B}) + m(\hat{C})$;

$m(B\hat{E}C) = 180^o - \frac{m(\hat{B})}{2} - \frac{m(\hat{C})}{2}$ =>

=> $2 \cdot m(B\hat{E}C) = 360^o - m(\hat{B}) - m(\hat{C})$ => $2 \cdot m(B\hat{E}C) =$

$= 360^o - m(B\hat{D}C)$ => $m(B\hat{D}C) + 2 \cdot m(B\hat{E}C) = 360^o$.

6. Se consideră cazurile $m(\hat{B}) > m(\hat{C})$ şi $m(\hat{C}) > m(\hat{B})$.

7. Dacă $AB \parallel CD$ => $ABCD$ dreptunghi => $AD \parallel BC$.

Dacă $AB \cap CD = \{E\}$, atunci E este în interiorul cercului sau E este în exteriorul cercului. Se studiază ambele cazuri.

8. Se notează: $m(BN) = m(NC) = a$, $m(CP) = m(PA) =$

$= b$, $m(AM) = m(MB) = c$.

$P\hat{M}N = B\hat{A}C$ => $a + b = 2a$ => $a = b$. Analog $b = c$.

9. Fie $\{D\} = AM \cap PN$. Atunci avem:

$$A\hat{D}P = \frac{\text{arc}(AP) + \text{arc}(MN)}{2} = \frac{\text{arc}(AP) + \text{arc}(MC) + \text{arc}(CN)}{2} =$$

$$= \frac{\text{arc}(AB) + \text{arc}(BC) + \text{arc}(CA)}{4} = 90^0.$$

10. ΔABC este isoscel şi AH înălţime, rezultă că [AH este bisectoare => arc (BD) = arc (DC)(1). $B\hat{C}F \equiv B\hat{A}D$ => arc (BF) = arc (BD) => $[BF] \equiv [BD]$ (2). Analog $[DC] \equiv [CE]$ (3).

Din (1), (2), (3) rezultă $[FB] \equiv [BD] \equiv [DC] \equiv [CE]$.

12. Se arată că : $C\hat{D}F \equiv C\hat{F}D$.

13. Fie $OE \perp AB$. Atunci OE este mediană în triunghiurile isoscele OAB şi OCD. Atunci $EA = EB$ şi $EC = ED$ =>
=> $EA - EC = EB - ED$ => $AC = BD$.

16. Ducem diametrul ce trece prin A, apoi construim coarda perpendiculară pe acest diametru.

17. Cele trei drepte se intersectează în punctul M' care este diametral opus lui M.

20. Se folosesc echivalenţele :

$OM = ON <=> OM^2 = ON^2 <=> OB^2 - MB^2 = OB^2 - NB^2 <=>$

$<=> MB = NB <=> \frac{AB}{2} = \frac{BC}{2} <=> AB = BC$.

21. Fie T şi S mijloacele segmentelor $[MM']$ şi $[NN']$.

a) $\Delta OAT \equiv \Delta OBS$ => $[OT] \equiv [OS]$ => $[MM'] \equiv [NN']$

b) $\Delta OTM' \equiv \Delta OSN$ => $T\hat{O}M' \equiv S\hat{O}N$ => N, O, M' coliniare.

22. Bisectoarea unghiului $\hat{E}$ intersectează cercul în A', A''. Deoarece EA'' este bisectoare, rezultă: $A\hat{E}A'' \equiv A''\hat{E}B$ =>

$$=> \frac{\text{arc}(AA'') - \text{arc}(A'D)}{2} = \frac{\text{arc}(A''B) - \text{arc}(A'C)}{2} =>$$

=> arc (AA'') - arc $(A'D)$ = arc $(A''B)$ - arc $(A'C)$ =>
=> arc (AA'') + arc $(A'C)$ = arc $(A''B)$ + arc $(A'D)$ =>
=> $M\hat{P}N \equiv M\hat{N}P$ => triunghiul MNP este isoscel.

23. Triunghiul AOB este isoscel => $O\hat{A}B \equiv O\hat{B}A =$

$$= \frac{180^\bullet - m(A\hat{O}B)}{2} = \frac{180^\bullet - 120^\bullet}{2} = 30^\bullet => C\hat{A}B \equiv C\hat{B}A =$$

$= 90^\bullet - 30^\bullet = 60^\bullet$ => ΔCAB este echilateral.

26. M trebuie să fie mijlocul arcului mic AB.

28. Se arată că patrulaterul $ACBD$ este paralelogram şi cum $AC = BC$, rezultă că $ACBD$ este romb.

29. Avem $AD \perp BC$. Centrul cercului circumscris triunghiului dreptunghic ABD este O mijlocul lui AB. Atunci OD este linie mijlocie în triunghiul ABC, de unde rezultă $OD \parallel AC$. Însă $DE \perp AC$ => $OD \perp DE$ => DE este tangentă cercului circumscris triunghiului ABD.

33. a) Unghiul din A fiind exterior triunghiului ACC_1 rezultă : $m(B\hat{A}C) = 90^o + m(A\hat{C}C_1) = 90^o + m(\hat{B})$

b) $\Delta ACC_1 \sim \Delta CBC_1 \Rightarrow \frac{CC_1}{BC_1} = \frac{AC_1}{CC_1} \Rightarrow CC_1^2 = AC_1 \cdot BC_1$.

34. a) Fie T punctul de tangenţă al lui MN cu cercul. Triunghiurile OTM, OAM şi respectiv OTN, OBN sunt congruente şi atunci rezultă : $M\hat{O}T \equiv A\hat{O}M$; $N\hat{O}T \equiv B\hat{O}N$. Însă $A\hat{O}M + M\hat{O}T + N\hat{O}T + B\hat{O}N = 180^o \Rightarrow M\hat{O}N = 90^o$.

b) $[AM] \equiv [MT]$; $[BN] \equiv [NT]$.

În triunghiul MON aplicăm teorema înălţimii şi rezultă $OT^2 = TN \cdot TM \Rightarrow AM \cdot BN = r^2$.

36. Fie AM tangenta în A la cerc. Avem $DB = DC$ ca tangente duse din D la cerc. $A'D \parallel AM \Rightarrow B\hat{A}'D = B\hat{A}M = \frac{\text{arc}(AB)}{2} = A\hat{B}M = A'\hat{B}D \Rightarrow BD = A'D$. Analog $CD = DD'$. Atunci $A'D = D'D$ şi D este mijlocul segmentului $[A'D']$.

38. $m(C\hat{A}F) = m(E\hat{C}F)$, $m(C\hat{F}A) = m(C\hat{F}E) \Rightarrow \Delta ACF \sim \Delta CEF \Rightarrow \frac{AC}{CE} = \frac{CF}{EF} = \frac{AF}{CF} \Rightarrow CF^2 = FE \cdot FA$.

40. Fie M, N, P, Q punctele de tangenţă ale patrulaterului cu cercul. Atunci avem: $AM = AQ$; $MB = NB$; $DP = DQ$; $CP = CN$. Adunând membru cu membru obţinem :
$AB + CD = BC + AD$.

41. $[AO$ este bisectoarea unghiului $D\hat{A}B$ şi $[DO$ este bisectoarea unghiului $A\hat{D}C$. Atunci avem :
$m(D\hat{A}B) + m(A\hat{D}C) = 180^o \Rightarrow 2 \cdot m(D\hat{A}O) + 2 \cdot m(A\hat{D}O) = 180^o$
Atunci $m(A\hat{O}D) = 90^o$. Analog $m(B\hat{O}C) = 90^o$.

42. Conform problemei **40** : $AB + CD = AD + BC$. Însă:
$EF = \frac{AB + CD}{2} \Rightarrow EF = \frac{AD + BC}{2} \Rightarrow AD + BC = 2 \cdot EF$.

44. Conform problemei **40**, avem $MN + BC = MB + NC$.
$BM = \frac{AB}{2}, CN = \frac{AC}{2}, MN = \frac{BC}{2} \Rightarrow \frac{BC}{2} + BC = \frac{AB}{2} + \frac{AC}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3 \cdot BC = AB + AC$.

45. Fie D, E, F punctele de tangenţă ale cercului înscris cu laturile AC, AB, BC şi r raza cercului înscris. Atunci:
$AEOD$ este pătrat şi avem: $AE = AD = r$; $CD = CF = AC - r$; $BE = BF = AB - r$. Atunci: $BC = BF + FC = AB - r + AC - r = AB + AC - d \Rightarrow d = AB + AC - BC$.

46. Fie M şi N punctele de tangenţă cu AD respectiv AB ale cercurilor date. Ţinând seama că segmentele tangente duse dintr-un punct exterior la un cerc sunt egale, găsim :
$EF = AE - AF = AN - AM = (AB - r) - (AD - r) =$
$= (a - r) - (b - r) = a - b$, unde r este raza cercului înscris.

47. Se arată că mijloacele arcelor AB, BC şi respectiv CA coincid cu C_1, A_1 şi respectiv B_1. Atunci rezultă că AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente, ca bisectoare în triunghiul ABC.

48. Se foloseşte problema **40.**

49. $ABCD$ este inscriptibil <=> $m(\hat{ABC}) + m(\hat{CDA}) =$
$= 180^o$ <=> $2 \cdot m(\hat{ABC}) = 180^o$ <=> $ABCD$ este dreptunghi.

50. $ABCD$ este inscriptibil <=> $m(\hat{DAB}) + m(\hat{DCB}) =$
$= 180^o$ <=> $m(\hat{DAB}) \equiv m(\hat{ABC})$ <=> $ABCD$ este isoscel.

51. $O_1A = O_1B = O_2A = O_2B$ ca raze. Atunci patrulaterul AO_1BO_2 este romb şi deci $O_1A \parallel O_2B$.

53. a) Punctele C, B, D sunt coliniare deoarece :
$m(\hat{ABC}) + m(\hat{ABD}) = 90^o + 90^o = 180^o$.
b) O_1O_2 este linie mijlocie în triunghiul ACD, de unde $CD = 2 \cdot O_1O_2$.

54. Ducem o secantă $M'N'$ prin A.
$M\hat{B}M' \equiv M'\hat{A}M \equiv N'\hat{A}N \equiv N\hat{B}N'$ => $M\hat{B}N \equiv M'\hat{B}N'$.

56. În triunghiul O_2AO_1 isoscel, ducem înălţimile AC şi O_1D, de unde rezultă $[O_1C] \equiv [AD]$. Însă $[AD] \equiv [O_1M]$ =>
=> $[O_1C] \equiv [O_1M]$ => $O_1C = r_1$. Cum $AB \perp O_1O_2$ =>
$AB \cap O_1O_2 = \{C\}$.

57. $[TO_1$ şi $[TO_2$ sunt bisectoare ale aceluiaşi unghi.

58. Fie C' mijlocul laturii $[AB]$. Atunci $C'\hat{F}A \equiv C'\hat{A}F$.
$EF \parallel AC$ => $C'\hat{F}A \equiv C\hat{A}F$. Rezultă $C'\hat{A}F \equiv C\hat{A}F$ => $[AF$ este bisectoarea unghiului $B\hat{A}C$. Analog $[AH$ este bisectoarea unghiului $B\hat{A}C$.

60. Se ţine cont de relaţiile : $O_1A^2 = AB^2 + r_1^2$;
$O_1M^2 = OO_1^2 - r^2$; $OB^2 = r^2 + AB^2$; $ON^2 = OO_1^2 - r_1^2$.

64. Fie O_1, O_2 centrele cercurilor, O_3 centrul cercului înscris în triunghiul curbiliniu format, R, r razele celor două cercuri. Prin O_3 ducem $MN \parallel AB$. Notând cu x raza cercului de centru O_3 avem: $AM = BN = x$, $O_1M = R - x$, $O_2N = r - x$, $O_1O_3 = R + x$, $O_2O_3 = r + x$. Din triunghiurile dreptunghice

O_1MO_3, O_2NO_3 rezultă: $MO_3 = 2\sqrt{Rx}$; $NO_3 = 2\sqrt{rx}$;

$MN = AB = 2\sqrt{Rr}$; $MN = MO_3 + NO_3 \Rightarrow x = \dfrac{Rr}{(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2}$.

65. Fie $\{O\} = AD \cap BC$. Atunci $\Delta ABO \equiv \Delta DBO \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = BD \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DBC \Rightarrow B\hat{D}C = B\hat{A}C = 90^o \Rightarrow$

$\Rightarrow BD \perp DC$. Atunci $m(F\hat{D}E) = m(E\hat{A}F) = 90^o$ şi deci patrulaterul $ADFE$ este inscriptibil.

66. Fie $\{O\} = MN \cap PQ$; $M\hat{O}Q = \dfrac{\text{arc}(MQ) + \text{arc}(NP)}{2} =$

$= \dfrac{\text{arc}(AM) + \text{arc}(AQ) + \text{arc}(CN) + \text{arc}(CP)}{2} =$

$= \dfrac{\text{arc}(AB) + \text{arc}(BC) + \text{arc}(CD) + \text{arc}(DA)}{4} = \dfrac{360^o}{4} = 90^o \Rightarrow$

$\Rightarrow MP \perp NQ$.

68. Cum $m(B\hat{A}C) = 90^o$ şi $m(B\hat{O}C) = 90^o$, rezultă că patrulaterul $ABOC$ este inscriptibil. Atunci $m(B\hat{A}O) = m(B\hat{C}O) =$

$= 45^o$, de unde rezultă că $[AO$ este bisectoarea unghiului $B\hat{A}C$.

69. Patrulaterul $AMDB$ este inscriptibil dacă şi numai dacă $m(A\hat{M}B) = m(A\hat{D}B) = 90^o$.

70. Fie $\{I\} = BB' \cap CC'$. Atunci : $B\hat{I}C' = \dfrac{I\hat{B}C + I\hat{C}B}{2} =$

$= \dfrac{\hat{B}}{2} + \dfrac{\hat{C}}{2} = \dfrac{180^o - \hat{A}}{2} = \dfrac{180^o - 60^o}{2} = 60^o \Rightarrow B\hat{I}C' = B'\hat{A}C' \Rightarrow$

$\Rightarrow AB'IC'$ este inscriptibil şi atunci $IB\hat{'}C' = IA\hat{C}' = 30^o$.

72. $A\hat{M}D = 180^o - M\hat{A}D - M\hat{D}A = 180^o - \dfrac{\hat{A}+\hat{D}}{2} = 90^o$.

Analog $B\hat{P}C = 90^\bullet \Rightarrow A\hat{M}D + B\hat{P}C = 180^o \Rightarrow MNPQ$ este patrulater inscriptibil.

73. $\Delta ADC \equiv \Delta CEB \Rightarrow E\hat{B}C \equiv D\hat{C}A$.

$B\hat{I}C = 180^o - I\hat{B}C - I\hat{C}B = 180^o - I\hat{B}C - (60^o - I\hat{C}E) =$

$= 120^o - I\hat{B}C + I\hat{C}E = 120^o \Rightarrow D\hat{I}E = 120^o$.

Atunci $D\hat{I}E + D\hat{A}E = 120^o + 60^o = 180^o$.

74. Triunghiul BCM este isoscel, $C\hat{B}M = C\hat{B}A + A\hat{B}M =$

$= 60^o + 90^o = 150^o \Rightarrow B\hat{C}S = 15^o \Rightarrow S\hat{C}A = 45^o$. Analog $S\hat{A}C = 45^o$ de unde rezultă că triunghiul ASC este dreptunghic isoscel. Atunci $C\hat{S}P + P\hat{Q}C = 90^o + 90^o = 180^o$;

$A\hat{S}M + A\hat{N}M = 90^o + 90^o = 180^o$ şi deci patrulaterele $CSPQ$ şi $ASMN$ sunt inscriptibile.

75. Deoarece triunghiurile AOB, BOC, COD, DOA sunt dreptunghice, rezultă că centrele cercurilor circumscrise acestor triunghiuri O_1, O_2, O_3, O_4 sunt mijloacele laturilor AB, BC, CD şi respectiv DA. Atunci $O_1O_2O_3O_4$ este paralelogram. Însă O_1O_2, O_2O_3 sunt linii mijlocii în triunghiurile AOB şi BOC. Atunci avem: $O_1O_2 \,||\, AC$; $O_2O_3 \,||\, BD$ şi cum $AC \perp BD \Rightarrow O_1O_2 \perp O_2O_3$ şi deci $O_1O_2O_3O_4$ este dreptunghi.

76. Fie $AD \perp BC$, $D \in BC$. Se demonstrează că cele două cercuri trec prin D.

77. Ambele coarde sunt perpendiculare pe diagonala AC.

78. Punctul comun este H.

82. $MP \,||\, AC$ şi $MN \,||\, AB \Rightarrow m(N\hat{M}P) = 90^o$.

$E\hat{D}A \equiv E\hat{A}D$; $F\hat{D}A \equiv F\hat{A}D \Rightarrow E\hat{D}F \equiv E\hat{A}F \Rightarrow m(Q\hat{D}P) = 90^o$.

84. Se foloseşte inscriptibilitatea patrulaterelor $AMOQ$, $BNOM$, $CPON$, $DQOP$.

85. Se demonstrează că $AMDN$ este inscriptibil.

89. Se arată că: $M\hat{A}O_1 = 90^o - O_2\hat{N}B$; $M\hat{N}B = 90^o + O_2\hat{N}B$.

91. Avem : $A\hat{C}D \equiv A\hat{B}E$ şi $A\hat{D}F \equiv A\hat{B}F$ (1). Unghiul $A\hat{D}F$ fiind exterior triunghiului ACD avem : $A\hat{D}F = A\hat{C}D + D\hat{A}C \Rightarrow C\hat{A}D = A\hat{D}F - A\hat{C}D$ (2). Însă $A\hat{B}F = A\hat{B}E + E\hat{B}F \Rightarrow E\hat{B}F = A\hat{B}F - A\hat{B}E$ (3). Din (1), (2), (3) avem: $C\hat{A}D \equiv E\hat{B}F$.

92. Patrulaterul $BCB'C'$ este inscriptibil deoarece unghiurile $BB'C$ şi $CC'B$ sunt drepte. Fie AM tangenta în A la cerc. Atunci: $A\hat{B'}C' = A\hat{B}C = \frac{\text{arc}(\hat{AC})}{2} = M\hat{A}C \Rightarrow AM \,||\, B'C'$.

93. Se arată că : $\Delta ABD \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$.

94. Fie $d = AM$ tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC. Patrulaterul $BCED$ este inscriptibil $\Rightarrow B\hat{D}E = B\hat{C}A = \frac{\text{arc}(\hat{AB})}{2} = M\hat{A}B \Rightarrow d \,||\, DE$. Cum $AO \perp d \Rightarrow AO \perp DE$.

95. Fie $AA' \perp BC$, $A' \in BC$ şi D punctul de intersecţie al lui AA' cu cercul. $A'\hat{B}D = \frac{\text{arc}\,\hat{CD}}{2} = A'\hat{A}C = 90^0 - \hat{C} = H\hat{B}A'$. Cum $A'B$ este comună triunghiurilor $A'BD$ şi $A'BH$ rezultă că cele două triunghiuri sunt congruente şi deci $[A'H] \equiv [A'D]$.

96. $BH \perp AC$; $A'C \perp AC \Rightarrow BH \parallel A'C$ (1).
$CH \perp AB$; $A'B \perp AB \Rightarrow CH \parallel A'B$ (2).
Din (1) şi (2) rezultă $HBA'C$ este paralelogram.
$m(\hat{BHC}) = m(\hat{B}) + m(\hat{C})$.
$HBA'C$ este dreptunghi $\Rightarrow m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = m(\hat{A}) = 90^o$.
$HBA'C$ este romb $\Rightarrow [HB] \equiv [HC] \Rightarrow [AB] \equiv [AC]$.

97. a) Din problema precedentă, HA' trece prin M, mijlocul lui $[BC]$.
b) $[A'A_1]$ şi $[AM]$ sunt mediane în $\Delta AHA' \Rightarrow [A'A_1]$ trece prin G. Analog şi $[B'B_1]$ şi $[C'C_1]$ trece prin G.

98. Din problema precedentă rezultă $[HO]$ şi $[AM]$ mediane în $\Delta AHA' \Rightarrow HO$ trece prin $G \Rightarrow HG = 2 \cdot OG$.

100. a) $\Delta ABD \sim \Delta CED \Rightarrow AB \cdot CD = AD \cdot EC$.
b) $\Delta ABD \sim \Delta AEC \Rightarrow AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

102. $\hat{ADC} \equiv \hat{ABC} \equiv \hat{ACB} \Rightarrow \Delta ADC \sim \Delta ACE \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{AD}{AC} \Rightarrow AE \cdot AD = AC^2 = \text{constant}$.

107. Fie $ABCD$ patrulater inscriptibil cu $\hat{BOC} \equiv \hat{ADC}$ (1)
Se arată că: $\hat{ADB} \equiv \hat{ABD} \Rightarrow [AB] \equiv [AD]$. Presupunem apoi că $[AB] \equiv [AD] \Rightarrow \hat{ABD} \equiv \hat{ADB}$. Se arată că $\hat{ADC} \equiv \hat{BOC}$.

115. $\hat{EDF} = \hat{ECF} = \dfrac{\text{arc}(AB)}{4} \Rightarrow$ patrulaterul $CDEF$ este inscriptibil $\Rightarrow \hat{FEC} = \hat{FDC} = \dfrac{\text{arc}(BC)}{2} = \hat{BAC} \Rightarrow EF \parallel AB$.

119. Fie $\{Q\} = MP \cap CD$. Triunghiul APB este dreptunghic în P, MP mediană $\Rightarrow$ triunghiul AMP este isoscel $\Rightarrow \hat{MPA} \equiv \hat{MAP}$. Însă $\hat{MPA} \equiv \hat{CPQ}$ şi atunci rezultă $\hat{MAP} \equiv \hat{CPQ}$. Atunci avem: $\hat{CPQ} + \hat{PCQ} = \hat{MAP} + \hat{PCQ} = \hat{BAC} + \hat{ACD} =$
$= \dfrac{\text{arc}(BC) + \text{arc}(AD)}{2} = \dfrac{180^o}{2} = 90^o \Rightarrow MP \perp CD$.

121. Deoarece AD este bisectoare, rezultă că, în cercul circumscris triunghiului ABD avem : arc (BD) = arc $(ND) \Rightarrow$ $BD = ND$. Analog $DC = MD$. Adunând cele două relaţii obţinem : $BD + DC = MD + ND \Rightarrow MD + ND = BC$.

122. Se consideră $N \in MC$ astfel încât $\hat{MAN} = 60^o$. Atunci triunghiul AMN este echilateral, de unde rezultă că $AM = MN$. Se arată apoi că $\Delta ACN \equiv \Delta ABM \Rightarrow NC = MB$. Atunci: $MA + MB = MN + NC = MC$.

11. ARII

2. Triunghiurile au bazele egale şi aceeaşi înălţime.

3. Fie $AA' \perp BC$. Atunci $\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{BD \cdot AA'}{CD \cdot AA'} = \frac{BD}{CD}$.

4. Se alege D astfel încât $BD = 2 \cdot DC$ şi respectiv $BD = 4 \cdot CD$. Punctul D poate fi pe segmentul (BC), dar şi în afara lui.

6. $S_{ABM} = \frac{MD \cdot AB}{2}$, $S_{ACM} = \frac{ME \cdot AC}{2} \Rightarrow \frac{S_{ABM}}{S_{ACM}} = \frac{MD}{ME}$.

Fie $AA' \perp BC$.

$S_{ABM} = \frac{MB \cdot AA'}{2}$, $S_{ACM} = \frac{MC \cdot AA'}{2} \Rightarrow \frac{S_{ABM}}{S_{ACM}} = \frac{MB}{MC}$.

9. Se arată că triunghiurile $A'MN$ şi AMN sunt congruente.

11. Se ia $M \in (CD)$ astfel încât $\frac{DM}{DC} = \frac{2}{3}$ şi $N \in (BC)$ astfel încât $\frac{BN}{BC} = \frac{2}{3}$.

14. Fie $\{O\} = AC \cap BD$. $S_{ABC} = \frac{BO \cdot AC}{2}$;

$S_{ADC} = \frac{DO \cdot AC}{2} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2}$.

15. $S_{ABCD} = DN \cdot AB = AM \cdot BC$ (1). Folosind (1) rezultă: $[DN] \equiv [AM] \Leftrightarrow [AB] \equiv [BC] \Leftrightarrow ABCD$ este romb.

16. $S_{AMC} = S_{ABN} = \frac{S_{ABC}}{2} \Rightarrow S_{AMPN} + S_{PNC} = S_{AMPN} + S_{BMP}$.

Atunci $S_{BMP} = S_{CNP}$. $S_{ABN} = S_{BCM} = \frac{S_{ABC}}{2} \Rightarrow$

$S_{AMPN} + S_{BMP} = S_{BCP} + S_{BMP} \Rightarrow S_{AMPN} = S_{BCP}$.

17. $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{A'B' \cdot A'C' \cdot \sin A'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{AC}{A'C'} = k^2$

18. Dacă $M \in [BC]$ atunci $S_{ABC} = S_{ABM} + S_{AMC}$

Dacă $M \notin [BC]$ atunci $S_{ABC} = |S_{ACM} - S_{ABM}|$.

19. Se foloseşte relaţia $S_{ABC} = S_{ABM} + S_{BCM} + S_{CAM}$.

20. Se foloseşte egalitatea: $S_{ABC} = S_{ABM} + S_{AMC}$.

21. $S_{ADE} = S_{BCED} \Rightarrow S_{ADE} = \frac{S_{ABC}}{2} \Rightarrow \frac{AD \cdot AE}{AB \cdot AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow AE = \frac{AB \cdot AC}{2 \cdot AD}$; $AE < AC \Rightarrow AB < 2 \cdot AD$.

22. $S_{BDE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} = \frac{1}{6} \cdot S_{ABC}$; $S_{CEF} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot S_{ABC} = \frac{1}{6} \cdot S_{ABC}$;

$S_{ADF} = \frac{3}{8} \cdot S_{ABC}$; $S_{DEF} = S_{ABC} - S_{ADF} - S_{BDE} - S_{CEF} = \frac{7}{24} \cdot S_{ABC}$.

23. Se arată că $S_{ADME} = \sqrt{S_1 \cdot S_2}$.

24. $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \frac{AE \cdot AF}{AC \cdot AB} = \frac{BD \cdot CD}{BC^2}$; $\frac{S_{BDF}}{S_{ABC}} = \frac{BF \cdot BD}{AB \cdot BC} = \frac{BD^2}{BC^2}$;

$\frac{S_{CDE}}{S_{ABC}} = \frac{CE \cdot CD}{CA \cdot BC} = \frac{CD^2}{BC^2}$.

25. $S_{ABC} = \frac{a \cdot b \sin C}{2} \leq \frac{a \cdot b}{2} \leq \frac{a^2 + b^2}{4}$.

26. $a \cdot h_a = b \cdot h_b \Rightarrow \frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a} > 1 \Rightarrow h_a > h_b$.

27. $S_{BA'B'} = S_{CB'C'} = S_{AA'C'} = 2 \cdot S_{ABC}$.

29. $S_{PQRS} = \frac{2}{9} \cdot S_{ABCD}$; **30.** $S_{ABC} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2}{\alpha \cdot \beta}$.

33. $S_{ACD} + S_{BCM} = \frac{h \cdot (DC + MB)}{2} = \frac{h \cdot (AB - MB)}{2} = S_{AMC}$.

34. $S_{ACD} = S_{ECD} = \frac{1}{2} \cdot S_{CDEF}$; $S_{BCD} = S_{EDC} = \frac{1}{2} \cdot S_{CDEF}$.

36. $\frac{S_{AOD}}{S_{COD}} = \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} > 1 \Rightarrow S_{AOD} > S_{COD}$.

38. Fie F mijlocul lui $[BC]$.

$S_{BCE} = S_{CEF} + S_{BEF} = \frac{EF \cdot h}{2} = \frac{S_{ABCD}}{2}$.

39. $S_{EGOHF} = S_{EFDC} - S_{CDH} - S_{COG} = S_{ADC} + S_{BCD} -$

$- S_{CDH} - S_{COG} = S_{ADH} + S_{COD} + S_{CGB}$.

40. $S_{AMQ} = \frac{1}{4} S_{ABD}$; $S_{CPN} = \frac{1}{4} S_{CDB} \Rightarrow S_{AMQ} + S_{CNP} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$

Analog $S_{BMN} + S_{DPQ} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$. Evident $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

41. $[AC] \equiv [BD] \Rightarrow MNPQ$ romb $\Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{MP \cdot NQ}{2}$.

42. $S_{A_1A_2A_3A_4} = S_{A_1'A_2'A_3'A_4'} = 2 \cdot S_{MNPQ}$.

44. $S_{CDM} + S_{ABM} = S_{BCN} \Rightarrow S_{CDQ} + S_{ABP} = S_{MPNQ}$.

45. $2 \cdot S_{ABN} = S_{ABD} + S_{ABC}$; $2 \cdot S_{CDM} = S_{ADC} + S_{BCD}$.

46. $3 \cdot S_{ADQ} = S_{ADC}$; $3 \cdot S_{BCN} = S_{ABC} \Rightarrow 3 \cdot S_{ADQ} + 3 \cdot S_{BCN} =$
$= S_{ABCD} \Rightarrow 3 \cdot S_{ANCQ} = 2 \cdot S_{ABCD}$ (1)
$S_{MNPQ} = S_{QMN} + S_{NPQ} = S_{QAM} + S_{NPC}$ (2)
(1), (2) $\Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{S_{ANCQ}}{2} = \frac{S_{ABCD}}{3}$.

47. $S_{NQTS} = 2 \cdot S_{CNQ}$; $S_{MPST} = 2 \cdot S_{APM} \Rightarrow$
$\Rightarrow S_{MPNQ} = 2 \cdot (S_{CNQ} + S_{APM}) = \frac{2}{3} \cdot S_{AMCN} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD}$.

48. $S_{DMN} = S_{ADM} - S_{ADN} = \frac{S_{ABCD}}{2} - \frac{S_{ADEF}}{2} = \frac{S_{BCEF}}{2} = S_{BCN}$.

49. Ducem $AA' \perp BC \Rightarrow AO_3BA'$ este inscriptibil $\Rightarrow$
$\Rightarrow m(B\hat{A}'O_3) = m(B\hat{A}O_3) = 45^o \Rightarrow A'O_3 \parallel BO_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow S_{O_3BO_1} = S_{A'BO_1}$. Analog $S_{O_2CO_1} = S_{A'CO_1}$. Prin adunare rezultă $S_{O_3BO_1} + S_{O_2CO_1} = S_{O_1BC} \Rightarrow S_{O_3BQ} + S_{O_2CP} = S_{O_1PQ}$.

50. Notăm $s_1 = S_{AB_2C_1}$; $s_2 = S_{BC_2A_1}$; $s_3 = S_{CA_2B_1}$;
$M = S_{BC_2B_2C_1}$; $N = S_{CA_2C_2A_1}$; $P = S_{AB_2A_2B_1}$.
Avem: $S_{ABA_1} = S_{BCB_1} = S_{CAC_1} = \frac{S_{ABC}}{3} \Rightarrow s_1 + s_2 + M =$
$= s_2 + s_3 + N = s_3 + s_1 + P = \frac{S_{ABC}}{3} \Rightarrow S_{ABC} = 2 \cdot (s_1 + s_2 + s_3) +$
$+ M + N + P$ (1). Avem de asemenea:
$S_{ABC} = s_1 + s_2 + s_3 + M + N + P + S_{A_2B_2C_2}$ (2).
Din (1) şi (2) rezultă $S_{A_2B_2C_2} = s_1 + s_2 + s_3$.

51. $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$; **52.** $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$; **55.** $\frac{n \cdot \sin\left(\frac{360}{n}\right)}{2\pi}$.

12. INEGALITĂŢI

1. a) Dacă $BC \geq AC$, avem:
$AB + AC > BC \Rightarrow AB > BC - AC = |BC - AC|$.
b) Dacă $BC < AC$, avem:
$AB + BC > AC \Rightarrow AB > AC - BC = |BC - AC|$.

2. Se folosesc inegalităţile de la problema **1.**

3. $AD \leq AM = \frac{BC}{2} \Rightarrow BC \geq 2 \cdot AD$.

4. $d < a$; $d < b \Rightarrow 2 \cdot d < a + b$.

5. $AFDE$ romb $\Rightarrow$ M mijlocul lui $[AD] \Rightarrow [MA] \equiv [MD]$.
Din triunghiurile AMB şi AMC avem: $MB + \frac{AD}{2} > AB$ şi
$MC + \frac{AD}{2} > AC \Rightarrow MB + MC + AD > AB + AC \Rightarrow$
$\Rightarrow MB + MC > AB + AC - AD$.

6. Se folosesc inegalităţile $AB < OA + OB < AC + BC$ şi analoagele şi se adună apoi membru cu membru.

7. $AM + MC > AC$; $AM + MB > AB \Rightarrow 2 \cdot AM + BC > AC + AB$. Analog: $2 \cdot BN + AC > AB + BC$ şi $2 \cdot CP + AB > AC + BC$ şi se adună membru cu membru.
$AM < MC + AC$, $AM < MB + AB \Rightarrow 2AM < AB + AC + BC$.
Analog $2BN < AB + AC + BC$, $2CP < AB + AC + BC$ şi se adună membru cu membru.

8. $AD < AB$; $AD < AC \Rightarrow 2 \cdot AD < AB + AC$.

9. Prelungim mediana $[AM]$ cu segmentul $[MD] \equiv [AM]$.
Avem $AD < AC + CD \Rightarrow 2 \cdot AM < AC + AB$.

10. Se foloseşte $2 \cdot AM < AB + AC$ şi analoagele.

11. a) $2 \cdot OM < OA + OB$ şi analoagele şi se adună.
b) $MP < OP + OM < \frac{OA + OB}{2} + \frac{OC + OD}{2} = \frac{AC + BD}{2}$.

12. $AB < BC + AC < BC + CD + DA$.

13. $OA + OB > AB$; $OC + OD > CD$ şi se adună.

14. $AC + BD > AB + CD$; $AC + BD > BC + DA$.

15. $AC < AB + BC$; $AC < CD + DA$. Prin adunare:

$2 \cdot AC < AB + BC + CD + DA$. Analog
$2 \cdot BD < AB + BC + CD + DA$ şi se adună.

16. Fie P mijlocul lui $[AC]$.

$MN < NP + MP = \dfrac{AD + BC}{2} \Rightarrow 2 \cdot MN < AD + BC.$

17. Se foloseşte problema **16.**

18. Din patrulaterele $BCEF$, $ABDE$, $ACDF$ avem:
$2 \cdot RN < CE + BF$: $2 \cdot MQ < BD + AE$; $2 \cdot PS < AC + DF$.

19. $AD > AB + AC - BC \Leftrightarrow AD + BC > AB + AC \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow AD^2 + BC^2 + 2 \cdot AD \cdot BC > AB^2 + AC^2 + 2 \cdot AB \cdot AC \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow AD^2 > 0.$

20. În ΔOAB: $OM > OA + OB - AB \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{d}{2} + l > \dfrac{d_1 + d_2}{2} \Rightarrow d + 2 \cdot l > d_1 + d_2$.

21. $OM > OA + OB - AB$; $ON > OB + OC - BC$;
$OP > OC + OD - CD$; $OQ > OD + OA - DA$.
Se adună membru cu membru.

22. $AD > AB \Rightarrow m(A\hat{B}D) > m(A\hat{D}B)$
$CD > BC \Rightarrow m(C\hat{B}D) > m(C\hat{D}B)$.
Adunăm inegalităţile cu unghiuri: $m(A\hat{B}C) > m(A\hat{D}C)$.

23. Fie $\{E\} = AD \cap BC$. Rezultă $m(A\hat{E}B) > 90^o$.
$m(A\hat{D}B) > m(A\hat{E}B) > 90^o \Rightarrow OA > AD$. Analog $OB > BC$.
În ΔOCD avem: $OC + OD > DC$. Adunăm cele trei relaţii:
$OA + OB + OC + OD > AD + BC + DC \Rightarrow$
$\Rightarrow AC + BD > BC + CD + DA.$

24. Fie $[AM]$, $[BN]$ mediane. Atunci $AG \perp BN \Rightarrow$
$m(A\hat{N}B) < 90^o \Rightarrow m(B\hat{N}C) > 90^o \Rightarrow BC > NC \Rightarrow BC > \dfrac{AC}{2}$.
Atunci $\dfrac{BC}{AC} > \dfrac{1}{2}$. Analog $\dfrac{BC}{AC} < 2$.

26. Fie M, N mijloacele coardelor $[AB]$ şi $[CD]$.
$AB = 2OM = 2\sqrt{R^2 - OM^2}$; $CD = 2 \cdot \sqrt{R^2 - ON^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow AB \cdot CD = 4\sqrt{R^2 - OM^2} \cdot \sqrt{R^2 - ON^2} \leq$
$\leq 2(2R^2 - OM^2 - ON^2) \Rightarrow AB \cdot CD \leq 2(2R^2 - OP^2).$

27. Aplicând teorema bisectoarei în triunghiurile ABD şi ACD obţinem: $\frac{AM}{MD} = \frac{AB}{BD}$ şi $\frac{AN}{ND} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AM}{MD} + \frac{AN}{ND} = \frac{2(AB + AC)}{BC} > \frac{2BC}{BC} = 2.$

29. a) Dacă $BD < AC \Rightarrow BD^2 < AC \cdot BD \Rightarrow AC^2 + BD^2 <$

$< AC^2 + AC \cdot BD \Rightarrow AC^2 + BD^2 < AC(AC + BD) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AC^2 + BD^2}{AC + BD} < AC < AB + BC.$

30. Fie $C_1 \in (BC$ astfel încât $AC = CC_1$. Atunci $[AM] \equiv [C_1M]$. În triunghiul MBC_1 avem: $MB + MC_1 > BC_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow MB + MA > BC + CA.$

31. $m(\hat{ADC}) > m(\hat{DBC})$. Atunci luăm $E \in (AC)$ astfel încât $\hat{EDC} \equiv \hat{DBC} \Rightarrow \Delta DBC \sim \Delta EDC \Rightarrow \frac{DC}{EC} = \frac{BC}{DC} \Rightarrow$

$\Rightarrow DC^2 = BC \cdot EC < BC \cdot AC \Rightarrow DC < \sqrt{BC \cdot AC}.$

32. Rotim figura în jurul punctului A cu 60^o. Triunghiul ABC se va transforma în triunghiul ACC', iar punctul M se va transforma în M'. Triunghiul AMM' este echilateral, de unde $AM = MM'$ (1). Triunghiurile ABM şi ACM' sunt congruente, de unde $MB = CM'$ (2). În triunghiul $MM'C$ avem: $MM' + MC > M'C \Rightarrow AM + MC > MB.$

Dacă M se află pe cercul circumscris $\Delta ABC \Rightarrow$

$\Rightarrow M \in (M'C \Rightarrow MA + MC = MB.$

33. Avem $m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$ şi atunci:

$$bc - \frac{a^2}{4} \le \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \Leftrightarrow bc \le \frac{b^2 + c^2}{2} \Leftrightarrow (b - c)^2 \ge 0$$

$$\frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \le bc + \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2}{2} - bc \le \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(b - c)^2}{2} \le \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow |b - c| \le a.$$

13. PROBLEME RECAPITULATIVE

5. a) $AB^2 = AD^2 + BD^2$; $AD^2 = AC^2 - CD^2$ =>
=> $AB^2 = AC^2 - CD^2 + BD^2$. Însă $|BD| = |BC - CD|$ =>
$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD$.

6. Se aplică teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile OAB şi OBC.

7. Se aplică relaţia lui Stewart în triunghiul ABC.

8. Ducem $ME \,||\, AB$, $E \in (AC)$ şi $MF \,||\, AC$, $F \in (AB)$. Se foloseşte asemănarea de triunghiuri: CME, CBA şi respectiv BFM, BAC.

9. Ca la directă obţinem relaţia:
$AB^2 \cdot MC^2 + AC^2 \cdot MB^2 = BC^2(ME^2 + MF^2)$. Însă din enunţ:
$AB^2 \cdot MC^2 + AC^2 \cdot MB^2 = BC^2 \cdot MA^2$. Atunci :
$ME^2 + MF^2 = MA^2 \Rightarrow ME^2 + AE^2 = MA^2 \Rightarrow m(\hat{A}) = 90^o$.

10. a) Se arată că $m(\hat{A}) = 60^o$.

b) În triunghiul ABC aplicăm teorema lui Pitagora genaralizată: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AD = AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC$.

11. Se aplică teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile ABC şi respectiv ADC.

12. Aplicând relaţia lui Stewart obţinem:
$AM^2 \cdot BC + AB^2 \cdot MC - AC^2 \cdot BM = BC \cdot BM \cdot CM \Rightarrow$
$\Rightarrow AM^2 \cdot BC - AB^2 \cdot (MB - MC) = BC \cdot BM \cdot CM \Rightarrow$
$\Rightarrow AM^2 - AB^2 = BM \cdot CM$.

13. Se aplică formula medianei în triunghiurile MAC şi MBD şi se obţin relaţiile: $MA^2 + MC^2 = \dfrac{4 \cdot MO^2 + AC^2}{2}$ şi
$MB^2 + MD^2 = \dfrac{4 \cdot MO^2 + BD^2}{2}$.

14. Se aplică formula medianei în triunghiul FAC şi apoi în triunghiurile ABD şi BCD.

15. Ducem o paralelă prin C la AB care intersectează pe $A'B'$ în P. Se foloseşte asemănarea triunghiurilor $A'CP$,

$A'BC'$ şi respectiv $AB'C'$, $CB'P$.

16. Fie $\{A''\} = B'C' \cap BC$. Se aplică teorema lui Menelaus pentru transversala $B'A''C'$ şi se arată că A', A'' coincid.

17. Se aplică teorema lui Menelaus în $\Delta BCB'$ pentru transversala AA' şi apoi în $\Delta ABB'$ pentru transversala CC'.

18. Fie $\{M'\} = BB' \cap CC'$ şi $\{A''\} = AM' \cap BC$. Se aplică teorema lui Ceva şi se arată că punctele A', A'' coincid.

19. $\Delta MBQ \sim \Delta MCD \Rightarrow \frac{BQ}{CD} = \frac{MB}{MC}$ (1).

$\Delta MCP \sim \Delta MBA \Rightarrow \frac{CP}{AB} = \frac{MC}{MB}$ (2).

Înmulţind membru cu membru (1) cu (2) obţinem:

$\frac{BQ}{CD} \cdot \frac{CP}{AB} = 1 \Rightarrow BQ \cdot CP = AB \cdot CD =$ constant.

20. Se folosesc paralelismele: $DC \parallel BE$ şi $DC \parallel AE$.

22. a) $\Delta DPO \sim \Delta CMO \Rightarrow \frac{OP}{OM} = \frac{DP}{MB} \Rightarrow \frac{DQ}{QA} = \frac{DP}{PC} \Rightarrow$

$\Rightarrow PQ \parallel AC$. Analog $MN \parallel AC$.

b) $MN = OB$ şi $PQ = OD \Rightarrow MN + PQ = BD = AC$.

23. „$\Rightarrow$" Fie P, Q mijloacele diagonalelor $[AC]$, $[BD]$. $MQNP$ este paralelogram $\Rightarrow PR = RQ$, $\{R\} = MN \cap PQ$. Paralela prin P la AB taie pe $[DB]$ în Q' şi pe $[MN]$ în $R' \Rightarrow$ $PR' = R'Q' \Rightarrow RR'$ linie mijlocie în $\Delta PQQ' \Rightarrow$

$\Rightarrow RR' \parallel QQ'$, fals. Atunci $PQ \parallel AB$. Analog $PQ \parallel CD$, de unde rezultă $AB \parallel CD$.

24. Se arată că $DE \perp B'C'$ şi $ME \perp B'C'$.

26. Punctul D se află pe cercul circumscris triunghiului ABC. Se aplică dreapta lui Simson.

27. $\Delta MAC \sim \Delta MDB \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB} \Rightarrow MA \cdot MB =$

$= MC \cdot MD$. Fie $[EF]$ diametrul ce trece prin O.

$MA \cdot MB = ME \cdot MF = (R - OM)(R + OM) = R^2 - OM^2$.

29. $AC^2 + OB^2 + OD^2 = BD^2 + OA^2 + OC^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow OA^2 + OC^2 + 2OA \cdot OC + OB^2 + OD^2 = OB^2 + OD^2 +$

$+ 2OB \cdot OD + OA^2 + OC^2 \Leftrightarrow OA \cdot OC = OB \cdot OD$.

30. $QA \cdot QB = (R + OQ)(R - OQ) = R^2 - OQ^2$;

$PC \cdot PD = R^2 - OP^2$.

Atunci $QA \cdot QB - PA \cdot PB = R^2 - OQ^2 - (R^2 - OP^2) =$

$= OP^2 - OQ^2 \Rightarrow QA \cdot QB - PC \cdot PD = PQ^2$.

31. $AM \cdot AN = AC^2 - CT^2 = AC^2 - AC \cdot BC =$

$= AC \cdot (AC - BC) = AC \cdot AB$.

32. $\rho(B) = BA \cdot BP = BM \cdot BC \Rightarrow BP = \dfrac{BM \cdot BC}{AB}$;

$\rho(C) = CA \cdot CN = CM \cdot BC \Rightarrow CN = \dfrac{CM \cdot BC}{AB}$;

Prin adunare obţinem: $BP + CN = \dfrac{BC^2}{AB}$ = constant.

33. Se aplică puterea punctului B faţă de cercul circumscris triunghiului AA_1C şi puterea punctului C faţă de cercul circumscris triunghiului AA_1B. Apoi se aplică teorema bisectoarei în triunghiul ABC.

34. AM, BN, CP fiind concurente, aplicând teorema lui Ceva rezultă $\dfrac{MB}{MC} \cdot \dfrac{NC}{NA} \cdot \dfrac{PA}{PB} = 1$ (1).

$\rho(A) = AN \cdot AN' = AP \cdot AP' \Rightarrow \dfrac{PA}{NA} = \dfrac{N'A}{P'A}$ (2).

$\rho(B) = BM \cdot BM' = BP \cdot BP' \Rightarrow \dfrac{MB}{PB} = \dfrac{P'B}{M'B}$ (3).

$\rho(C) = CM \cdot CM' = CN \cdot CN' \Rightarrow \dfrac{NC}{MC} = \dfrac{M'C}{N'C}$ (4).

Din (1), (2), (3), (4) $\Rightarrow \dfrac{N'A}{P'A} \cdot \dfrac{P'B}{M'B} \cdot \dfrac{M'C}{N'C} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{M'C}{M'B} \cdot \dfrac{P'B}{P'A} \cdot \dfrac{N'A}{N'C} = 1$.

35. „$\Rightarrow$“ Construim ΔADE astfel încât $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.

Atunci $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DE} = \dfrac{AC}{AE} \Rightarrow DE = \dfrac{AD \cdot BC}{AB}$ şi $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AD}{AE}$. Cum

$E\hat{A}C \equiv D\hat{A}B$, rezultă $\Delta ADB \sim \Delta AEC \Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DB}{EC} \Rightarrow$

$\Rightarrow EC = \frac{AC \cdot DB}{AB}$. Atunci $CE = CD + DE \Rightarrow \frac{AD \cdot BC}{AB} +$

$+ CD = \frac{AC \cdot DB}{AB} \Rightarrow AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot DB$.

„<=" Construim $\Delta ADE \sim \Delta ABC \Rightarrow DE + DC = CE \Rightarrow$

$\Rightarrow ABCD$ este inscriptibil.

36. Se aplică teorema lui Ptolemeu în patrulaterul inscriptibil $ABCD$.

37. Se aplică teorema lui Ptolemeu în $MAED$ şi $MBCD$.

38. Fie M punctul de intersecţie al bisectoarelor $[AA']$ şi $[CC', A' \in [CD], C' \in [AB]$. Atunci avem:

$m(C\hat{M}A') = m(D\hat{C}C') - m(C\hat{A}'M) = \frac{1}{2} \cdot m(\hat{C}) - m(A\hat{A}'D)$ (1)

$m(A\hat{A}'D) = 180^o - m(\hat{D}) - \frac{1}{2} \cdot m(\hat{A})$ (2).

Din (1) şi (2) rezultă $m(C\hat{M}A') = \frac{1}{2} \cdot (m(\hat{D}) - m(\hat{B}))$.

40. Se consideră cazurile $AC > AB$ şi $AB > AC$.

41. a) Prelungim mediana $[AM]$ cu $[MA'] \equiv [AM] \Rightarrow$ $ABA'C$ este paralelogram. $\Delta CAA' \equiv \Delta AGE \Rightarrow C\hat{A}A' \equiv A\hat{G}E$. $m(T\hat{A}G) = 90^o - m(C\hat{A}C')$. Atunci $m(T\hat{A}G) + m(A\hat{G}E) =$ $= 90^o \Rightarrow AT \perp EG$ şi evident $EG = AA' = 2 \cdot AM$.

b) $[AI]$ trece prin mijlocul lui $[EG]$. Analog ca la punctul a) se demonstrează că $AI \perp BC \Rightarrow I \in AD$.

c) $\Delta BCD \equiv \Delta AIB$ (2) $\Rightarrow A\hat{B}I \equiv B\hat{D}C \Rightarrow BI \perp DC$.

(2) $\Rightarrow [BI] \equiv [CD]$. Analog se demonstrează că $CI \perp BF$ şi $[CI] \equiv [BF]$. În triunghiul IBC CD, BF, ID sunt dreptele suport ale înălţimilor, deci sunt concurente.

42. Notăm $h = d(D, AB)$. Atunci $S_{ATSD} = \frac{h \cdot (AT + DS)}{2}$ şi

$S_{CSTB} = \frac{h \cdot (SC + TB)}{2}$. Însă $AT = SC$ şi $DS = TB$.

43. $\frac{S_{AOD}}{S_{AOB}} = \frac{OD}{OB}$ şi $\frac{S_{COD}}{S_{AOD}} = \frac{OC}{OA}$.

44. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{C_1A}{C_1B}$; $\frac{S_3}{S_4} = \frac{A_1B}{A_1C}$; $\frac{S_5}{S_6} = \frac{B_1C}{B_1A}$. Se foloseşte în continuare Teorema lui Ceva în triunghiul ABC.

GEOMETRIE ÎN SPAŢIU

1. RELAŢII ÎNTRE PUNCTE, DREPTE ŞI PLANE. PARALELISM. PERPENDICULARITATE.

1. a) Dacă $AB \parallel d$, luăm $\alpha = (AB, d)$.
b) Dacă $AB \cap d = \{M\}$, luăm $\alpha = (A, d)$.
c) Dacă AB şi d, sunt necoplanare luăm $\alpha = (A, d)$ şi $\beta = (B, d)$.

3. Ştim că punctele din plan egal depărtate de două drepte concurente din plan se găsesc pe bisectoarele unghiurilor celor două drepte.

4. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Atunci $MA = MB = MC$. Dacă d este dreapta ce trece prin O şi este perpendiculară pe α atunci pentru orice $M \in d$ avem: $MA = MB = MC$, deoarece $\Delta MOA \equiv \Delta MOB \equiv \Delta MOC$. Avem două situaţii:
a) Dacă $d \cap \beta = \{M\}$ atunci M este punctul căutat.
b) Dacă $d \cap \beta = \varnothing$ atunci problema nu are soluţie.

5. Punctele $M \in \alpha$ astfel încât $m(\hat{AMB}) = 90^\circ$ se găsesc pe cercul de diametru $[AB]$. Avem trei cazuri:
a) β are două intersecţii cu cercul şi atunci avem 2 puncte M.
b) β are un punct de intersecţie cu cercul şi atunci avem o soluţie.
c) β nu are intersecţii cu cercul şi atunci nu avem soluţii.

6. Fie $MM' \perp AB$ în planul α. Atunci $S_{MAB} = k$, de unde rezultă $MM' = \frac{2k}{AB}$ = constant şi atunci M se găseşte pe una din dreptele d_1 şi d_2 paralele cu AB şi situată la distanţa $\frac{2k}{AB}$ de dreapta AB.

7. Fie $\beta = (A, d)$ şi d' mediatoarea lui $[BC]$. Avem două situaţii: a) Dacă $d' \cap \beta = \{M\}$ atunci M este punctul căutat.
b) Dacă $d' \cap \beta = \varnothing$, atunci problema nu are soluţie.

8. Fie $\{A\} = d_1 \cap d_2$, $\{B\} = d_1 \cap d_3$, $\{C\} = d_2 \cap d_3$. Avem :
a) $A \in d_3$ caz în care dreptele d_1, d_2, d_3 sunt concurente.
b) $A \notin d_3$ caz în care $A \neq B$ şi $A \neq C$. Fie $\alpha = (d_1, d_2)$ şi atunci rezultă că $A, B, C \in \alpha \Rightarrow d_1 = AB$, $d_2 = AC$, $d_3 = BC$ sunt incluse în α şi deci coplanare, ceea ce este fals.

9. Se duce prin A dreapta $d' \parallel d$. Orice plan ce conţine dreapta d', cu excepţia planului (d, d') va fi paralel cu dreapta d.

10. Printr-un punct al dreptei d_1 se duce dreapta $d_2' \parallel d_2$. Atunci $\alpha = (d_1, d_2')$.

11. Ducem prin A dreptele $d' \parallel d_1$ şi $d'' \parallel d_2$. Atunci planul $\alpha = (d', d'')$ va fi paralel atât cu d_1 cât şi cu d_2.

12. Ducem prin A dreapta $d_2' \parallel d_2$. Atunci $\alpha = (d_2', B)$, unde $B \in d_1$.

13. Presupunem prin absurd că $d' \cap \alpha = \{A\}$. Fie $\beta = (A, d)$ şi $\beta \cap \alpha = d''$. Atunci $d'' \parallel d$ şi cum $d \parallel d'$ rezultă că $d' \parallel d''$. Însă $A \in d'$ şi $A \in d'' \Rightarrow A \in d' \cap d''$ ceea ce este fals.

14. Avem: $AB \parallel CD \Rightarrow CD \parallel (ABEF)$.

15. Fie $\beta = (ABCD)$ şi $d = (ABCD) \cap \alpha$. Rezultă că $AB \parallel d$. Însă $CD \parallel AB$ şi atunci $CD \parallel d$ şi deci $CD \parallel \alpha$.

16. În triunghiul ACM, ON este linie mijlocie. Atunci $ON \parallel CM$. Cum $ON \subseteq (BND)$ rezultă că $CM \parallel (BND)$.

17. a) Evident $[AF] \equiv [BE]$, $[AC] \equiv [BD]$ şi $C\hat{A}F \equiv D\hat{B}E$ (unghiuri cu laturile respectiv paralele).
b) $AB \parallel CD$, $AB \parallel EF$, $[AB] \equiv [CD]$, $[AB] \equiv [EF]$, de unde rezultă $CD \parallel EF$ şi $[CD] \equiv [EF]$.

18. (NP) şi (NO) sunt linii mijlocii în triunghiurile MBC şi respectiv MBD. Atunci $NP \parallel BC \parallel DA$ şi $NO \parallel DM$ şi deci $(ONP) \parallel (ADM)$.

20. $\alpha \cap (ABED) = AB$, $\beta \cap (ABED) = DE \Rightarrow$
$\Rightarrow AB \parallel DE \Rightarrow ABED$ este paralelogram $\Rightarrow [AB] \equiv [DE]$.
Analog $[BC] \equiv [EF]$ şi $[AC] \equiv [DF]$.

21. a) Avem $AB = BC = CA$. Evident $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$ şi $C_1A_1 \parallel CA \Rightarrow \Delta MAB \sim \Delta MA_1B_1$, $\Delta MBC \sim$

$\sim \Delta MB_1C_1$ şi $\Delta MCA \sim \Delta MC_1A_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} =$

$= \frac{CA}{C_1A_1} \Rightarrow [A_1B_1] \equiv [B_1C_1] \equiv [C_1A_1]$.

22. Presupunem prin absurd că $d \parallel \beta$. Cum $\alpha \parallel \beta$, rezultă că $d \parallel \alpha$, ceea ce este fals.

23. $\alpha \parallel \beta$, $(d_1, d_2) \cap \alpha = AB$, $(d_1, d_2) \cap \beta = MN \Rightarrow$

$\Rightarrow AB \parallel MN$ şi cum $AM \parallel BN \Rightarrow AMNB$ paralelogram $\Rightarrow$ $[MN] \equiv [AB]$. Analog $[NP] \equiv [BC]$, $[PQ] \equiv [CD]$, , $[QM] \equiv [AD]$.

$AD \parallel MQ$, $AB \parallel MN \Rightarrow m(Q\hat{M}N) = m(D\hat{A}B) = 90^o$.

24. Se arată că $EFGH$ este paralelogram.

25. Triunghiul VAD este echilateral, K este mijlocul lui $[AV]$, de unde rezultă $KD \perp AV$. Însă $KL \perp AV$, $KM \perp AV$. Rezultă că punctele K, L, D, M se găsesc în planul perpendicular pe AV în K.

26. Notăm cu a latura cubului, O mijlocul diagonalei $A'C$. Calculăm: $EO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $A'O = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $A'E = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow A'E^2 = EO^2 + A'O^2 \Rightarrow EO \perp A'C$. Analog $FO \perp A'C$.. Deci punctele E, F, G, H, I, J se găsesc în planul perpendicular pe $A'C$ în O.

27. $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AP$. Însă $SD \perp AP$ şi atunci rezultă $AP \perp (SDC) \Rightarrow AP \perp SC$. Analog $AM \perp SC$. Cum AM, AN, AP sunt perpendiculare pe SC, rezultă că punctele A, M, N, P sunt coplanare.

28. a) $EF \parallel CD' \parallel A'B \Rightarrow EF \parallel (ABB'A')$;

b) $EG \parallel AD \parallel A'D' \Rightarrow EG \parallel (A'B'C'D')$;

c) $GH \parallel DD' \parallel CC' \Rightarrow GH \parallel (BCC'B')$.

32. a) În triunghiul ACM, (NO) este linie mijlocie, de unde rezultă că $NO \parallel MA$. Cum $(BDN) \supset NO$, rezultă că $MA \parallel (BDN)$.

b) Deoarece $ABCD$ este romb, rezultă $BD \perp AC$ (1). $MA \perp (ABCD)$, $NO \parallel MA \Rightarrow NO \perp (ABCD) \Rightarrow NO \perp BD$; (2). Din (1) şi (2) rezultă $BD \perp (MAC)$.

33. Fie M mijlocul lui (CD) . Atunci $G_1 \in BM$, $G_2 \in AM$ şi $\frac{G_1M}{G_1B} = \frac{G_2M}{G_2A} = \frac{1}{2} \Rightarrow G_1G_2 \,||\, AB$ în triunghiul ABM. Analog $G_1G_3 \,||\, AC$, de unde $(G_1G_2G_3) \,||\, (ABC)$.

34. $a \subset \alpha$; $c \subset \alpha \Rightarrow a \,||\, c$ sau $a \cap c \neq \emptyset$.

Dacă $a \cap c \neq \emptyset \Rightarrow a \cap \beta \neq \emptyset$ fals, deoarece $a \,||\, \beta$.

Deci $a \,||\, c$. Analog $b \,||\, c \Rightarrow a \,||\, b$.

35. Fie $M \in AD$ arbitrar. Ducem $MN \,||\, AB$, $N \in BD$, $MQ \,||\, CD$, $Q \in AC$ şi notăm $\alpha = (MN, MQ)$. Atunci avem:

$$AB \,||\, MN \Rightarrow PQ = (ABC) \cap \alpha \,||\, MN.$$

Analog $NP \,||\, MQ$ şi atunci $MNPQ$ este paralelogram.

36. Procedând ca la **35.** se obţine ca secţiune paralelogramul $MNPQ$. Notăm $AB = c$, $CD = d$. Pentru ca paralelogramul $MNPQ$ să fie romb trebuie ca $MN = MQ = x$.

$\Delta AMQ \sim \Delta ADC \Rightarrow \frac{x}{d} = \frac{AM}{AD}$; $\Delta MND \sim \Delta ABD \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x}{c} = \frac{MD}{AD}$. Atunci: $\frac{x}{d} + \frac{x}{c} = 1 \Rightarrow x = \frac{cd}{c+d}$. Deci M trebuie ales pe AD astfel încât $\frac{MD}{AD} = \frac{d}{c+d}$

37. şi **38.** Se procedează ca la **35** şi **36.**

39. a) EF este linie mijlocie în triunghiul ABC şi atunci rezultă că $EF \,||\, BC$. Cum $(OBC) \supset BC$, rezultă $EF \,||\, (OBC)$.

b) Triunghiul AOB este isoscel, (OF) mediană $\Rightarrow$ (OF) înălţime $\Rightarrow OF \perp AB$ (1). DE este linie mijlocie în triunghiul $ABC \Rightarrow DE \,||\, AB$ (2). Din (1) şi (2) rezultă $DE \perp OF$ (3).

Triunghiul ABC este echilateral, F mijlocul lui AB, de unde rezultă că $CF \perp AB$. Cum $AB \,||\, DE$, rezultă $DE \perp CF$ (4). Din (3) şi (4) rezultă $DE \perp (COF)$.

c) $OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp OF$. GH este linie mijlocie în triunghiul $COF \Rightarrow GH \,||\, CO$ (2). Din (1) şi (2) rezultă $GH \perp FO$.

40. Folosind teorema bisectoarei în triunghiurile ABD şi ACD obţinem: $\frac{MB}{MD} = \frac{AB}{AD}$ (1) ; $\frac{NC}{ND} = \frac{AC}{AD}$ (2). Din (1) şi (2)

şi ţinând seama de $AB = AC$, deducem că:
$\frac{MB}{MD} = \frac{NC}{ND} \Rightarrow MN \| BC$ şi deci $MN \| (ABC)$.

41. Se foloseşte proprietatea că un plan taie două plane paralele după drepte paralele. Atunci $EFGH$ devine dreptunghi dacă $AB \perp CD$, devine romb dacă $\frac{AB}{CD} = \frac{d_1}{d_2}$, devine pătrat dacă $AB \perp CD$ şi $\frac{AB}{CD} = \frac{d_1}{d_2}$.

42. Notăm cu M mijlocul muchiei (AB). În triunghiul dreptunghic AEB, (EM) este mediană, deci $ME = MB$. Rezultă că triunghiul EMB este isoscel, deci $M\hat{E}B \equiv M\hat{B}E$. Însă $M\hat{B}E \equiv E\hat{B}C$ şi atunci $M\hat{E}B \equiv E\hat{B}C \Rightarrow ME \| BC \Rightarrow$
$\Rightarrow ME \| (CBD)$. Analog $MF \| (BCD)$.

43. Prin calcul se arată că unghiurile $A\hat{E}B$, $B\hat{E}C$ şi $C\hat{E}A$ sunt drepte.

44. $\Delta AMQ \equiv \Delta BNM \Rightarrow MN = MQ \Rightarrow NQ \perp OM$. Analog $NQ \perp OP$. Atunci rezultă că $NQ \perp (MOP)$.

45. Fie P mijlocul lui (AB). Atunci în triunghiul BNM avem: $OP \| MN$ deoarece $\frac{BP}{PM} = \frac{BO}{ON} = 2$ şi deci MN este linie mijlocie în triunghiul APO şi trece atunci prin mijlocul înălţimii (AO).

46. Notăm cu x latura pătratului. Triunghiul AEF este dreptunghic isoscel cu ipotenuza $EF = x$ şi atunci $AE = \frac{x}{\sqrt{2}}$. Triunghiul BEH este dreptunghic isoscel şi atunci $BE = EH = x$. Din $AB = AE + EB$ rezultă: $a = \frac{x}{\sqrt{2}} + x \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} =$
$= a\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2} - 1)$. $S_{EFGH} = x^2 = 2\cdot a^2(\sqrt{2} - 1)^2$.

47. Fie $E \in AB$ astfel încât $CE \perp AB$ şi $DE \perp AB$. Atunci:
$CA^2 = AE^2 + CE^2$, $CB^2 = BE^2 + CE^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow CA^2 - CB^2 = AE^2 - BE^2$. Analog:
$DA^2 - DB^2 = AE^2 - BE^2$. Din cele două relaţii rezultă:
$CA^2 - BC^2 = DA^2 - DB^2 \Rightarrow CA^2 + DB^2 = BC^2 + DA^2$.

48. Se aplică teorema **medianei în triunghiurile** *VAC* **şi** *VBD*.

49. $\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\frac{\delta}{d}=$

$$=\frac{V_{OBCD}+V_{OCDA}+V_{ODBA}+V_{OABC}}{V_{ABCD}}=\frac{V_{ABCD}}{V_{ABCD}}=1.$$

50. Vom demonstra mai întâi că ducând $AA' \perp \alpha$, $BB' \perp \alpha$ avem $\frac{AL}{BL}=\frac{AA'}{BB'}$ relaţie ce rezultă din asemănarea triunghiurilor $AA'L$ şi $BB'L$. Analog se obţin şi celelalte trei relaţii care se înmulţesc membru cu membru.

51. Fie $\{O\}=d_1 \cap d_2$ şi $\gamma=(d_1, d_2)$. Cum $\gamma \cap \alpha = AB$ şi $\gamma \cap \beta = CD$, rezultă că $AB \parallel CD$. Triunghiurile AOB şi COD sunt dreptunghice în O, şi atunci rezultă relaţiile:

$OA^2+OB^2=AB^2$, $OC^2+OD^2=CD^2 \Rightarrow AB^2+CD^2=$

$=(OA^2+OC^2)+(OB^2+OD^2)=AC^2+BD^2$.

52. Fie AA_1 şi $A'A_1'$ mediane în triunghiurile ABC şi respectiv $A'B'C'$. Atunci în trapezul $BB'C'C$, A_1A_1' este linie mijlocie, de unde rezultă $A_1A_1' \parallel BB'$, $A_1A_1'=\frac{BB'+CC'}{2}$.

În trapezul $AA'A_1'A_1$ avem: $\frac{GA_1}{GA}=\frac{G'A_1'}{G'A'}=\frac{1}{2}$, de unde rezultă $GG' \parallel AA'$. Fie $\{I\}=GG' \cap A'A_1$. Atunci: $GI=\frac{1}{3}\cdot AA'$, $G'I=\frac{2}{3}\cdot A_1A_1'=\frac{BB'+CC'}{3}$. Rezultă: $GG'=GI+G'I=$

$=\frac{1}{3}\cdot AA'+\frac{BB'+CC'}{3}=\frac{AA'+BB'+CC'}{3}$.

2. PROIECȚII ORTOGONALE PE UN PLAN. PLANE PERPENDICULARE. UNGHI DIEDRU

1. $MM_1 \perp \alpha \Rightarrow MM_1 \perp d$ și $MM_2 \perp \beta \Rightarrow MM_2 \perp d$. Atunci rezultă $d \perp (MM_1M_2)$.

3. a) $MB \perp (ABC)$, $AB \perp AC \Rightarrow MA \perp AC$.

b) $MB \perp (ABC) \Rightarrow MB \perp AC$ și cum $AB \perp AC$ rezultă că $AC \perp (MAB) \Rightarrow AC \perp BE$.

4. $MO \perp (ABC) \Rightarrow MO \perp BC$ (1). Însă $AO \perp BC \Rightarrow$ $\Rightarrow BC \perp (AOM) \Rightarrow AM \perp BC$.

5. a) Se aplică problema **4.**

6. a) $MC \perp (ABC)$; $CD \perp AD \Rightarrow MD \perp AD$.

b) ED este linie mijlocie în triunghiul $BCM \Rightarrow ED \parallel MC$. Însă $MC \perp (ABC)$ și atunci $ED \perp (ABC) \Rightarrow ED \perp AC$.

c) $BC \perp ED$, $BC \perp AD \Rightarrow BC \perp (ADE) \Rightarrow BC \perp AE$.

7. a) $MA \perp (ABCD)$; $AB \perp BC \Rightarrow MB \perp BC$.

b) $MA \perp (ABCD)$; $AD \perp DC \Rightarrow MD \perp DC$.

c) $MA \perp (ABCD)$; $CD \subseteq (ABCD) \Rightarrow MA \perp DC$.

9. a) $MA \perp (ABCD)$, $AO \perp BD \Rightarrow MO \perp BD$.

b) Unghiul diedru făcut de planele (MBD) și (ABC) este $A\hat{O}M$. Atunci $tg\,(A\hat{O}M) = \frac{AM}{AO} = 1 \Rightarrow m\,(A\hat{O}M) = 45^o$.

10. a) și b) Cu ușurință se arată că în orice hexagon regulat avem: $AC \perp CD$ și $AE \perp ED$. Însă $MA \perp (ABCDEF)$ și atunci din teorema celor trei perpendiculare rezultă $MC \perp CD$ și $ME \perp ED$.

c) Triunghiul ACE este echilateral, $EG \perp AC$ și atunci rezultă că $MG \perp BE$.

11. Dacă DM este diametru atunci avem:

$m\,(D\hat{B}M) = m\,(D\hat{C}M) = 90^o$ și deci: $BD \perp BM$, $CD \perp MC$. Însă din ipoteză $BD \perp AB$ și $DC \perp AC$, de unde rezultă că $BD \perp$ $\perp (ABM)$ și $CD \perp (ACM) \Rightarrow BD \perp AM$ și $DC \perp AM \Rightarrow$ $\Rightarrow AM \perp (BCD)$.

14. a) $MG \perp (ABCD) \Rightarrow MG \perp EF$; deoarece $EFGH$ este pătrat, avem $EF \perp FG$ și atunci $EF \perp (MGF)$.

c) $MG \perp (ABCD) \Rightarrow MG \perp HF$; însă $HF \perp EG$ și atunci $HF \perp (MEG) \Rightarrow HF \perp ME$.

15. $MA \perp (ABCD) \Rightarrow MA \perp BC$ şi cum $AB \perp BC$ rezultă $BC \perp (ABM) \Rightarrow BC \perp AE$. Însă $BM \perp AE$ şi atunci rezultă $AE \perp (BMC)$. Analog $AF \perp (MCD)$.

16. Fie $AO \perp (BCD)$. Cum $AB = AC = AD$, rezultă că O este centrul cercului circumscris triunghiului BCD. Atunci $OM \perp BC$, $ON \perp CD$, $OP \perp BD$.

$NP \parallel BC$, $OM \perp BC \Rightarrow NP \perp OM$ (1)

$AO \perp (BCD) \Rightarrow AO \perp NP$ (2)

Din (1) şi (2) rezultă $NP \perp (AOM) \Rightarrow NP \perp AM$ (3).

Din ipoteză $AN \perp AM$ (4).

Din (3) şi (4) avem $AM \perp (ANP) \Rightarrow AM \perp AP$.

Analog $AN \perp AP$.

17. Fie E mijlocul lui (CD). Atunci AE şi BE sunt mediane în triunghiurile isoscele ACD şi BCD şi vor fi deci şi înălţimi. Atunci $BE \perp CD$, $AE \perp CD \Rightarrow CD \perp (ABE) \Rightarrow CD \perp AB$.

18. Triunghiul ABC este isoscel, de unde rezultă că $BN \perp \perp AC$. Triunghiul ACD este isoscel, de unde rezultă că $DN \perp \perp AC$. Atunci $AC \perp (BND) \Rightarrow AC \perp MN$. Analog se demonstrează că $MN \perp BD$.

19. Ducem $DH \perp (ABC) \Rightarrow DH \perp BC$. Însă $BC \perp AH$ şi atunci $BC \perp (AHD) \Rightarrow BC \perp AD$. Analog se demonstrează celelalte două relaţii.

20. Fie $BB' \perp CD$, $CC' \perp BD$ şi $DD' \perp BC$, H ortocentrul triunghiului BCD. Avem $BC \perp DD'$; $BC \perp AD \Rightarrow BC \perp \perp (ADD') \Rightarrow BC \perp AH$. Analog $CD \perp AH$, de unde rezultă $AH \perp (BCD) \Rightarrow AH \perp BD$. Însă $CC' \perp BD$ şi atunci $BD \perp \perp (AHC) \Rightarrow BD \perp AC$.

21. Fie β planul ce conţine pe O şi este perpendicular pe α. Ducem $OM \perp \alpha$ şi $MA \perp a$, $MB \perp b$, $MC \perp c$. Din teorema celor trei perpendiculare rezultă $OA \perp a$, $OB \perp b$, $OC \perp c$. şi deci OA, OB, $OC \subseteq \beta$.

22. Prin calcul se arată că triunghiurile AEB şi AEC sunt dreptunghice în E.

23. Avem $AD \perp (ABC) \Rightarrow AD \perp CE$ (1)

Însă $CE \perp AB$ (2). Din (1) şi (2) rezultă că $CE \perp (ABD) \Rightarrow \Rightarrow CE \perp BD$ (3). Avem deci: $BD \perp CE$ şi $BD \perp EF$, de unde rezultă $BD \perp (CEF)$.

24. $OC \perp OA$, $OC \perp OB \Rightarrow OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp AB$.
Triunghiul OAB este isoscel de unde rezultă $OD \perp AB$.
Atunci $AB \perp (OCD)$, $AB \subseteq (ABC) \Rightarrow (ABC) \perp (CDO)$.

25. $AM \perp (A3CD)$; $AO \perp BD \Rightarrow MO \perp BD$.
Analog $NO \perp BD$. Cum BD este intersecţia planelor (MBD) şi (NBD), rezultă că unghiul diedru este $m(\hat{MON})$.
Prin calcul $MO = NO = a$ şi $MN = a\sqrt{2}$ şi deci triunghiul MON este dreptunghic în O. Atunci $m(\hat{MON}) = 90^o$.

26. HE este linie mijlocie în triunghiul ACD', de unde rezultă $HE \parallel CD'$. Însă $CD' \parallel A'B$, şi atunci $HE \parallel A'B$.
Analog $EF \parallel AB'$. Atunci $(EFH) \parallel (ABB'A')$.
Analog $(FGH) \parallel (ABCD)$. Însă $(ABB'A') \perp (ABCD)$ şi atunci $(EFH) \perp (FGH)$.

27. a) $MO \perp (ABC) \Rightarrow MO \perp AD$ şi cum $BC \perp AD$, rezultă $AD \perp (BCM)$, de unde $AD \perp BM$. Însă $AE \perp BM$ şi atunci $BM \perp (ADE)$.
c) $AD \perp (BCM)$, $AE \perp MB \Rightarrow DE \perp MB \Rightarrow DE \parallel MC$.
Analog $DF \parallel ME$. Avem: $ME \perp (ADE)$, $DF \parallel ME \Rightarrow DF \perp \perp (ADE) \Rightarrow (ADF) \perp (ADE)$.

28. a) $(\hat{AB', BD}) = (\hat{AB', B'D'}) = 60°$, deoarece triunghiul $AB'D'$ este echilateral.
b) $(\hat{A'C', B'C}) = (\hat{AC, B'C}) = 60°$, deoarece triunghiul ACB' este echilateral.
c) $(\hat{AC, B'C'}) = (\hat{AC, BC}) = 45°$, deoarece AC este diagonala pătratului $ABCD$.

29. a) $BD \perp (AA'C'C) \Rightarrow BD \perp AC'$.
b) În planul $(CDC'D')$ ducem $D'M \parallel C'D$. Cum $AB' \parallel C'D$ rezultă $A'B \parallel MD'$. Dacă notăm cu a lungimea laturii cubului atunci din calcul rezultă:
$MD' = a\sqrt{2}$, $MB = a\sqrt{5}$, $BD' = a\sqrt{3}$, care verifică relaţia
$MD'^2 + BD'^2 = MB^2 \Rightarrow B\hat{D}'M = 90^o = > (\hat{BD', AB'}) = 90^o$.
c) Triunghiul BDC' este echilateral şi atunci unghiul căutat are 60^o.

30. Fie $VO \perp (ABC)$. Atunci O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC şi deci $O \in AD$ astfel încât $AO = 2OD$.
Notăm cu a latura bazei. Atunci: $AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $OD = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

Aplicând teorema înălțimii în triunghiul DVA avem: $VO = \sqrt{AO \cdot OD} = \sqrt{\frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}}} = \frac{a}{\sqrt{6}}$ și $tg\, V\hat{D}O = \frac{VO}{OD} = \sqrt{2}$.

31. Fie $VABCD$ piramida, $VO \perp (ABCD)$, $OM \perp BC \Rightarrow$ $\Rightarrow VM \perp BC$. Fie a latura bazei. Atunci $OM = \frac{a}{2}$, $VM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

a) $\cos V\hat{A}O = \frac{AO}{AV} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m(V\hat{A}O) = 45^o$.

b) $\cos O\hat{M}V = \frac{OM}{VM} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

32. Fie $VABCD$ piramida, $VO \perp (ABCD)$, $OM \perp BC \Rightarrow$ $\Rightarrow VM \perp BC$. Triunghiul AVC este echilateral. Fie $a = AV = AC = VC$. Atunci:

$AB^2 + BC^2 = a^2 \Rightarrow AB = BC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow OM = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

$VO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow tg\, V\hat{M}O = \frac{VO}{OM} = \sqrt{6}$.

33. a) Fie $VO \perp (ABC)$, a latura bazei $\Rightarrow VA = 2a \Rightarrow$ $\Rightarrow VO = a\sqrt{3}$. Atunci: $\cos V\hat{A}O = \frac{AO}{VA} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow V\hat{A}O = 60^o$.

b) Fie $OM \perp AB \Rightarrow VM \perp AB$. $MO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $VM = \frac{a\sqrt{15}}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow \cos V\hat{M}O = \frac{MO}{VM} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

34. Fie $VABCD$ piramida, $VO \perp (ABCD)$, $OM \perp BC \Rightarrow$ $\Rightarrow VM \perp BC$. Fie l latura bazei. Atunci avem:

$m(V\hat{A}O) = 45^o \Rightarrow VO = AO = \frac{l\sqrt{2}}{2}$. $tg\, V\hat{M}O = \frac{VO}{MO} = \sqrt{2}$.

35. a) $MA \perp (ABC) \Rightarrow (MAB) \perp (ABC)$ și $(MAF) \perp$ $\perp (ABC)$.

b) Fie $AG \perp BC$, $AM \perp (ABC) \Rightarrow MG \perp BC \Rightarrow x = M\hat{G}A$. Analog $y = M\hat{C}A$. Atunci:

$\text{tg}\, x = 4$, $\text{tg}\, y = 2 \Rightarrow \text{tg}\, x = 2 \cdot \text{tg}\, y$.

36. a) $(MC, (ABC)) = M\hat{C}A$.

$tg\, M\hat{C}A = \frac{MA}{AC} = \frac{2a}{2a} = 1 \Rightarrow m(M\hat{C}A) = 45^o$.

b) $x = M\hat{B}A$; $y = M\hat{D}A \Rightarrow tg\, x = \frac{MA}{AB} = \frac{2a}{a\sqrt{2}} = \sqrt{2}$;

$\text{tg}\, y = \frac{MA}{AD} = \frac{2a}{a\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \text{tg}\, x \cdot \text{tg}\, y = 2.$

37. a) $tg\, A\hat{B}M = \frac{AM}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow A\hat{B}M = 60°$.Analog obţinem: $m(A\hat{C}M) = 60^{\circ}$.

b) Ducem $AA' \perp BC \Rightarrow MA' \perp BC$. Atunci:

$tg\, x = tg\, A\hat{A}'M = \frac{AM}{AA'} = 2$.

38. a) Toate cele trei unghiuri au 45°.

b) Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Atunci $((MBD), (ABC)) = M\hat{O}A$.

$tg\, M\hat{O}A = \frac{AM}{AO} = 2.$

c) Fie $AA_1 \perp BC$ şi $AA_2 \perp CD$. Cum $MA \perp (ABCD)$ rezultă că $MA_1 \perp BC$ şi $MA_2 \perp CD$. Atunci triunghiurile MAA_1 şi MAA_2 sunt congruente şi deci $M\hat{A}_1A \equiv M\hat{A}_2A$.

40. Fie l latura bazei. Atunci $AO = \frac{l\sqrt{3}}{3}$; $OA' = \frac{l\sqrt{3}}{6}$.

$VO^2 + AO^2 = VA^2 \Rightarrow VO^2 + \frac{l^2}{3} = 5 \cdot VO^2 \Rightarrow VO = \frac{l\sqrt{3}}{6}$.

$tg\, O\hat{A}'V = \frac{VO}{OA'} = 1 \Rightarrow m(O\hat{A}'V) = 45°$.

41. Fie $OE \perp AB$ şi $OF \perp BC$. Cum $OM \perp (ABCD)$ rezultă $ME \perp AB$ şi $MF \perp BC$.

$ME = \sqrt{MO^2 + OE^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ şi

$MF = \sqrt{MO^2 + OF^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15.$

42. Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Atunci avem :

$d(E, AB) = EA = \sqrt{DE^2 + AD^2} = a\sqrt{5}$;

$d(E, BC) = EC = \sqrt{ED^2 + DC^2} = a\sqrt{5}$.

$DE \perp (ABCD)$, $DO \perp AC \Rightarrow EO \perp AC$. Atunci:

$d(E, AC) = EO = \sqrt{DE^2 + DO^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{3\sqrt{2} \cdot a}{2}$.

43. Fie AA', BB', CC' înălțimile triunghiului. Atunci avem: $AA' = BB' = CC' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ și putem calcula:

$d(D, AB) = d(D, AC) = AD = 3a$;

$d(D, BC) = DA' = \sqrt{DA^2 + AA'^2} = \sqrt{9a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{39}}{2}$;

$d(D, AA') = DA = 3a$;

$d(D, BB') = DB' = \sqrt{DA^2 + AB'^2} = \sqrt{9a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{37}}{2}$;

$d(D, CC') = DC' = \sqrt{DA^2 + AC'^2} = \sqrt{9a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{37}}{2}$.

44. Se observă că $AB^2 + AC^2 = BC^2$ și deci triunghiul este dreptunghic în A. În continuare se procedează ca la **43.**

49. Fie $VO \perp (ABC)$. Atunci $\Delta VOA \equiv \Delta VOB \equiv \Delta VOC$ de unde rezultă $OA = OB = OC$. Prin calcul $A_{ABC} = 4\sqrt{3}$ și $R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4 \cdot A_{ABC}} = 4$. Atunci $VO = \sqrt{VB^2 - BO^2} = 3$.

50. a) Fie E mijlocul lui (BD') și F mijlocul lui (CC'). Atunci $FD' = FB = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow FE \perp BD'$.

$EC' = EC = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow EF \perp CC'$. Atunci

$EF^2 = BF^2 - EB^2 = \frac{5a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow EF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) AB este perpendiculara comună și $AB = a$.

51. Fie $AO \perp (BCD)$; $BO \cap CD = \{E\}$. Cum O este centrul cercului circumscris triunghiului BCD, rezultă că $BE \perp CD$. Însă $AO \perp (BCD) \Rightarrow AE \perp CD$. Deci $CD \perp AE$, $CD \perp AO \Rightarrow CD \perp (AOE)$. Ducem $EF \perp AB$. Însă $CD \perp (AOE) \Rightarrow CD \perp EF$ și atunci EF este perpendiculara comună a dreptelor AB și CD. Notăm cu a latura tetraedrului. Atunci $AE = BE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$AF = \frac{a}{2}$; $EF = \sqrt{AE^2 - AF^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

52. $AA' \parallel BB' \Rightarrow AA'BB'$ este trapez dreptunghic. Cum MM' este linie mijlocie în trapezul $AA'B'B$, rezultă $MM' \parallel AA'$. Însă $AA' \perp \alpha$, de unde $MM' \perp \alpha$.

54. Planele $(AA'D'D)$ şi $(BB'C'C)$ sunt perpendiculare pe α şi deci sunt paralele. Intersecţiile planului α cu planele de mai sus sunt dreptele $A'D'$ şi respectiv $B'C'$. Atunci rezultă $A'D' \parallel B'C'$. Analog $A'B' \parallel C'D'$.

56. Fie A', B', C' proiecţiile punctelor A, B, C pe planul α. Avem $AB \parallel A'B'$, $BB' \perp A'B' \Rightarrow BB' \perp AB$. Cum însă $BC \perp AB$, rezultă $AB \perp (BB'C'C)$. Deoarece $A'B' \parallel AB$ obţinem $A'B' \perp (BB'C'C) \Rightarrow A'B' \perp B'C'$ şi deci triunghiul $A'B'C'$ este dreptunghic.

57. Fie $\beta = (CDD'C')$. $\beta \cap \alpha = C'D'$, $CD \subseteq \beta$, $CD \parallel AB \Rightarrow C'D' = \alpha \cap \beta \parallel CD \Rightarrow C'D' \parallel AB$.

Deoarece CD este perpendicular pe DD' şi DA, rezultă că este perpendicular pe planul (ADD'). Atunci şi $C'D'$ este perpendicular pe (ADD') şi deci pe dreapta $A'D'$.

59. Fie P mijlocul lui (BC) şi P' proiecţia lui P pe α. Evident $PP' \perp \alpha$ şi atunci $PP' \parallel BB' \parallel CC'$, de unde rezultă că P' este mijlocul lui $(B'C')$. Fie $G \in AP$ astfel încât $GA = 2 \cdot GP$. Atunci $G'A' = 2 \cdot G'P'$, de unde rezultă că G' este centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$.

60. Fie A' proiecţia vârfului A pe planul p. Din triunghiurile dreptunghice $AA'B$ şi $AA'C$ rezultă $A'B^2 = 8^2 - A'A^2$ şi $A'C^2 = 7^2 - A'A^2$, de unde rezultă :

$A'B^2 - A'C^2 = 64 - AA'^2 - (49 - A'A^2) = 15$. Din triunghiul dreptunghic $BA'C$ se obţine $A'B^2 + A'C^2 = 25$. Rezultă $A'B^2 = 20$ şi $A'C^2 = 5$. Avem: $A'B^2 \cdot A'C^2 = 100$, de unde $A'B \cdot A'C = 10$. Atunci : $S_{BA'C} = \dfrac{A'B \cdot A'C}{2} = 5\text{cm}^2$.

61. Fie $AE \perp \alpha$, $CF \perp \alpha \Rightarrow AE \parallel CF$. Fie $\beta = (AE, CF)$. Atunci $E, F \in \alpha$; $E, F \in \beta \Rightarrow E, F \in \alpha \cap \beta$ şi deci EF este dreapta de intersecţie a celor două plane.

$O \in AC \subset \beta$; $O \in BD \subset \alpha \Rightarrow O \in \alpha \cap \beta = EF$.

$AO = CO$; $A\hat{O}E = C\hat{O}F \Rightarrow \Delta AEO \equiv \Delta CFO \Rightarrow AE = CF$.

62. Fie $A \in d$, $AO' \perp (d_1, d_2)$, $O'B \perp d_1$, $O'C \perp d_2$.
Se observă că $\Delta AOB \equiv AOC \Rightarrow AB = AC \Rightarrow$
$\Delta AO'B \equiv \Delta AO'C \Rightarrow OB = OC \Rightarrow O$ se găseşte pe bisectoarea unghiului făcut de d_1 şi d_2.

64. Fie A un punct arbitrar din spaţiu. Prin A ducem planele α şi β astfel încât $d \perp \alpha$ şi $d' \perp \beta$. Atunci $d'' = \alpha \cap \beta$ are proprietăţile: $A \in d''$, $d \perp d'' \subset \alpha$, $d' \perp d'' \subset \beta$ şi este dreapta căutată.

65. Deoarece $p \perp q$ şi $CB \perp AB$, rezultă $CB \perp q$. Atunci $CB \perp BD$, deci $m(\hat{CBD}) = 90^\circ$. Apoi $CB \perp q$, $BD \perp DA$, deci $m(\hat{CDA}) = 90^\circ$.

66. $\Delta DEA \sim \Delta DAB \Rightarrow \frac{DE}{DA} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{DE}{DC} = \frac{AD^2}{BD \cdot DC}$ (1)

$\Delta DFA \sim \Delta DAC \Rightarrow \frac{DF}{DA} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{DF}{BD} = \frac{AD^2}{BD \cdot DC}$ (2).

Din (1) şi (2) rezultă $\frac{DE}{DC} = \frac{DF}{BD} \Rightarrow \Delta DEF \sim \Delta DCB \Rightarrow$
$\Rightarrow BEFC$ este patrulater inscriptibil.

67. Presupunem prin absurd că există un tetraedru $ABCD$ cu feţele laterale triunghiuri isoscele, care au unghiul de la vârf de 120°. Deoarece triunghiurile ce reprezintă feţele laterale sunt congruente, rezultă că triunghiul de bază BCD este echilateral. Prin calcul rezultă latura bazei egală cu $a\sqrt{3}$. Fie $AO \perp (BCD)$. Atunci $BO = \frac{BC\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3} = a$, de unde rezulta $AB = BO$, ceea ce este fals.

68. Presupunem prin absurd că există piramidă hexagonală regulată $VABCDEF$ cu feţele laterale triunghiuri echilaterale. Fie VO înălţimea piramidei. Atunci avem: $VA = AB = AO$ şi în triunghiul dreptunghic AOV avem că ipotenuza este egală cu o catetă, ceea ce este fals.

3. CALCUL DE ARII ŞI VOLUME

3.1 PRISMA DREAPTĂ

2. Se ţine cont că $ABMN$ este dreptunghi.

3. Se calculaeză mai întâi OO', unde $\{O\} = AC \cap BD$.

6. Fie $ABCA'B'C'$ prisma triunghiulară regulată. Atunci: $m(B'CB) = 60°$, $BC = 10$ cm $\Rightarrow BB' = 10\sqrt{3}$.

$$V_{ABCA'B'C'} = A_{ABC} AA' = \frac{100\sqrt{3}}{4} \cdot 10\sqrt{3}\,\text{cm}^3 = 750\text{cm}^3.$$

7. Fie $ABCA'B'C'$ prisma triunghiulară regulată, $A'B$ diagonala unei feţe. Ducem $BB'' \perp AC$ (B'' este mijlocul lui AC). Atunci $m(BA'B'') = 45^o$, de unde rezultă egalitatea $A'B'' = BB''$. Notăm cu l latura bazei şi calculăm $BB'' = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, $A'B'' = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, $A'B = \frac{l\sqrt{6}}{2}$. Din triunghiul dreptunghic $A'AB$ calculăm:

$$A'B^2 = AB^2 + AA'^2 \Rightarrow \frac{6l^2}{4} = l^2 + a^2 \Rightarrow l^2 = 2a^2 \Rightarrow l = a\sqrt{2}.$$

$$A_l = 3 \cdot l \cdot AA' = 3\sqrt{2}\,a \cdot a = 3\sqrt{2}\,a^2,\ A_B = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

8. Din triunghiul ABC dreptunghic în A calculăm $AB = 20\sqrt{3}$ şi $BC = 40$ cm. Avem: $A'B' \perp AA'$, $A'B' \perp$ $\perp A'C' \Rightarrow A'B' \perp (AA'C'C)$. Atunci: $m(B'\hat{A}A') = 45^o \Rightarrow$ $\Rightarrow A'B' = AA' \Rightarrow AA' = 20\sqrt{3}$.

$$V_{ABCA'B'C'} = A_{ABC} AA' = \frac{AB \cdot AC}{2} \cdot AA' = 12000.$$

9. Ducem $BB_1 \perp AC$ şi $B'B'_1 \perp A'C'$. Conform teoremei celor trei perpendiculare, rezultă că $DB_1 \perp AC$ şi $DB_1' \perp$ $A'C'$. Atunci $m(B\hat{B}_1D) = 30^o$ şi $m(D\hat{B}_1'B') = 60^o$ şi calculăm

$$BB_1 = B'B_1' = \frac{a\sqrt{3}}{2};\ BB' = BD + DB' = BB_1 \cdot tg\,30^o +$$

$$+ B'B_1' \cdot \text{tg}\,60^o = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}\right) = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = 2a.$$

$V_{ABCA'B'C'} = A_{ABC}BB' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot 2a = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

10. Notând cu a, b, c laturile triunghiului ABC avem : $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{a+b+c}{2+3+4} = \frac{18}{9} = 2 \Rightarrow a = 4\text{cm}$, $b = 6\text{cm}$, $c = 8\text{cm}$. Înălțimea prismei este 18cm : 2 = 9cm, iar aria bazei se calculează cu formula lui Heron.

11. Înălțimea triunghiului ABC este $AA_1 = \frac{a}{2}$ și se calculează $BC = a\sqrt{3}$. Din triunghiul dreptunghic ABB' calculăm: $BB' = \sqrt{AB'^2 - AB^2} = \sqrt{2a^2 - a^2} = a$.

12. $m(C\hat{A}B) = 30^\circ \Rightarrow BC = \frac{a}{2}$; $AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$m(A\hat{C}A') = 45^\circ \Rightarrow AA' = AC = a$.

13. Fie $\{O\} = AC \cap BD$, M mijlocul muchiei (CC'). Atunci $m(M\hat{O}C) = 30^\circ \Rightarrow MC = \frac{OM}{2} = 5$ cm, $OC = 5\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow$ $CC' = 10$ cm, $AC = 10\sqrt{3}$ cm. Ducem $OE \perp BC$. Atunci $m(O\hat{M}E) = 30^\circ \Rightarrow OE = \frac{OM}{2} = 5$ cm $\Rightarrow AB = 10$ cm $\Rightarrow$ $BC = 10\sqrt{2}$.

14. Fie a, b, c dimensiunile paralelipipedului. Atunci avem: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = k \Rightarrow a = 2k$, $b = 3k$, $c = 5k$ și $abc = 30000 \Rightarrow$ $\Rightarrow k^3 = 1000 \Rightarrow k = 10 \Rightarrow a = 20\text{cm}$, $b = 30\text{cm}$, $c = 50\text{cm}$.

15. Fie a, b, c dimensiunile paralelipipedului inițial, unde c este înălțimea. Prin modificările suferite dimensiunile devin: $\frac{2a}{3}$, $\frac{3b}{4}$, $2c$, iar volumul paralelipipedului $V = \frac{2a}{3}\cdot\frac{3b}{4}\cdot 2c = abc$.

16. Notăm cu a și b dimensiunile dreptunghiului de la bază. $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ și $a^2 + b^2 + 10^2 = (10\sqrt{2})^2 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ și $a^2 + b^2 = 100$.

Din prima ecuație $b = \frac{4a}{3}$ și înlocuind în a doua ecuație obținem:

$a^2 + \frac{16a^2}{9} = 100 \Rightarrow 25a^2 = 900 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow b = 8$.

17. $m(D\hat{B}D') = 60$; $DD' = 10\sqrt{3}$cm => $DB = \frac{DD'}{tg\,60^\bullet} = 10$cm.

Din triunghiul ABD, $m(A\hat{B}D) = 30^o$ => $AD = \frac{DB}{2} = 5$cm;

$AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = 5\sqrt{3}$ cm; $V = AB \cdot BC \cdot DD' = 750$ cm^3.

18. Fie $ABCDA'B'C'D'$ paralelipipedul drept cu baza rombul $ABCD$ ce are $m(B\hat{A}D) = 60^o$, BD diagonala mică şi (AC) diagonala mare. Diagonala mică a paralelipipedului este (BD'). Atunci avem: $BD = a$ deoarece triunghiul ABD este echilateral, $AC = a\sqrt{3}$; $BD' = AC = a\sqrt{3}$; $DD' = a\sqrt{2}$.

19. Fie $ABCDA'B'C'D'$ paralelipipedul drept cu baza romb şi unghiul din A de 60°. Atunci triunghiul ABD este echilateral şi deci $BD = 10$cm. Din triunghiul BDD' rezultă $DD' = BD \cdot \text{tg}\,30^o = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.

20. Dacă A este unghiul ascuţit al rombului atunci $BD = \sqrt{3}$. Se calculează $AC = 3$ şi apoi înălţimea paralelipipedului $CC' = 4$cm. Atunci volumul este $V = 6\sqrt{3}$cm^3.

21. Ducem $DM \perp AB$ şi cum $DD' \perp (ABCD)$ rezultă $D'M \perp AB$ => $D\hat{M}D' = 60^\bullet$. Fie a latura rombului. Din triunghiul $DD'M$ avem $DD' = D'M \cdot \sin 60^\bullet = D'M \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Atunci:

$A_l = 4 \cdot AA' \cdot AB = 4 \cdot D'M \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = 2\sqrt{3} \cdot D'M \cdot a = 2\sqrt{3}$cm^2.

22. Fie $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ prisma hexagonală regulată şi $A'C$ diagonala mică. $m(A'\hat{C}A) = 60^\bullet$ => $AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ şi $AC = A'C \cdot \cos 60^\bullet = \frac{a}{2}$. Din triunghiul isoscel ABC cu unghiul $A\hat{B}C = 120^o$ şi $AC = \frac{a}{2}$, se calculează $AB = \frac{a}{\sqrt{12}}$.

23. Notăm cu l latura bazei şi h înălţimea prismei.

$A_B = 6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3} \cdot l^2}{2}$ => $V = A_B \cdot h = \frac{3 \cdot l^2 h\sqrt{3}}{2} = 375\sqrt{3}$cm^3

Atunci $l^2 h = 250$ (1). $A_l = 6lh = 300$ => $lh = 50$ (2).

Din (1) şi (2) prin împărţire membru cu membru obţinem: $l = 5$cm şi apoi $h = 10$cm.

24. Fie $\{O\} = AC' \cap BD'$. Triunghiul OAB este echilateral și atunci $OA = a \Rightarrow AC' = 2a$. Din triunghiul ACC' dreptunghic în C avem: $AC'^2 = AC^2 + CC'^2 \Rightarrow 4a^2 = 2a^2 + CC'^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow CC'^2 = 2a^2 \Rightarrow CC' = a\sqrt{2} \Rightarrow V = AB^2 \cdot AA' = a^3\sqrt{2}$.

25. Fie $ABCDA'B'C'D'$ prisma și $BD' = 10$cm.
$m(D\hat{B}D') = 30^\circ \Rightarrow DD' = \frac{BD'}{2} = 5\text{cm}$; $BD = 5\sqrt{3}$cm.

26. Notând cu l latura bazei și cu h înălțimea prismei avem:
$V = l^2 \cdot h = 250$; $A_l = 4l \cdot h = 200 \Rightarrow l = 5 \Rightarrow h = 10 \Rightarrow h = 2 \cdot l$.

27. Avem $m(D\hat{A}D') = 45^\circ \Rightarrow DD' = AD \Rightarrow DD' = 6$cm.
$A_l = 4 \cdot AB \cdot DD' = 4 \cdot 6 \cdot 6 = 144\text{cm}^2$; $A_{ABCD} = 36\text{cm}^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow A_t = 216\text{cm}^2$; $V = A_{ABCD} \cdot DD' = 36 \cdot 6 = 216\text{cm}^3$.

28. Notăm $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$ și avem:
$a + b + c = 20$. $BD' = 10\sqrt{2} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 200 \Rightarrow$
$\Rightarrow (a + b + c)^2 - 2 \cdot (ab + bc + ca) = 200 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \cdot (ab + bc + ca) = 200 \Rightarrow A_t = 200\text{ cm}^2$.

29. Notând cu a, b, c dimensiunile paralelipipedului, relația devine: $2ab + 2bc + 2ca = a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c$.

3.2 PIRAMIDA, TRUNCHIUL DE PIRAMIDĂ

1. Fie $VO \perp (ABC)$ și $BB' \perp AC$. $BO = 4\sqrt{3}$; $OB' = 2\sqrt{3}$;
$BB' = 6\sqrt{3}$; $m(V\hat{B}O) = 45 \Rightarrow VO = BO = 4\sqrt{3}$ cm.
$A_{ABC} = \frac{AC \cdot BB'}{2} = 36\sqrt{3}\text{cm}^2$; $V = \frac{A_{ABC} \cdot VO}{3} = 144\text{cm}^3$.
$VB' = \sqrt{VO^2 + OB'^2} = 2\sqrt{15}$; $A_l = \frac{3 \cdot AB \cdot VB'}{2} = 36\sqrt{15}\text{ cm}^2$.

2. Se notează cu l latura bazei piramidei și se calculează:
$V = \frac{l^3}{12} = 18\text{ m}^3 \Rightarrow l^3 = 216 \Rightarrow l = 6$ m. Apoi prin calcul rezultă că muchia laterală are $2\sqrt{6}$ cm.

4. Fie $VO \perp (ABC) \Rightarrow \Delta VOA \equiv \Delta VOB \equiv \Delta VOC \Rightarrow$ $\Rightarrow OA = OB = OC \Rightarrow O$ este centrul cercului circumscris $\Delta ABC \Rightarrow O$ este mijlocul lui $(AB) \Rightarrow OC = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.

$m(C\hat{A}B) = 30^\circ \Rightarrow BC = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow AC = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. Apoi $VO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V = \frac{A_{ABC} \cdot VO}{3} = \frac{a^3}{16}$.

5. Fie $ABCD$ tetraedrul regulat cu latura de lungime l şi AO înălţimea lui. Atunci: $BO = \frac{l\sqrt{3}}{3}$; $AO = \frac{l\sqrt{6}}{3}$.

$V = \frac{l^3\sqrt{2}}{12} = \sqrt{3} \Rightarrow l^3 = \frac{12\sqrt{6}}{2} = 6\sqrt{6} = (\sqrt{6})^3 \Rightarrow l = \sqrt{6}$ cm.

6. Fie $VABC$ piramida triunghiulară regulată, l latura bazei şi $VO \perp (ABC)$. $BO = \frac{l\sqrt{3}}{3}$; $OB' = \frac{l\sqrt{3}}{6}$; $m(O\hat{B}'V) = 45^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow VO = OB' = \frac{l\sqrt{3}}{6} \Rightarrow V = \frac{A_{ABC} \cdot VO}{3} = \frac{l^3}{24} = \frac{1}{24} \Rightarrow l = 1$.

Prin calcul $A_t = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{4}$ cm^2.

8. a) Deoarece $\Delta VAB \equiv \Delta VBC$ rezultă că proiecţia punctului A pe VB coincide cu proiecţia vârfului C pe VB. Atunci $AP \perp VB \Rightarrow CP \perp VB$. $\Delta ABP \equiv \Delta CBP$ deoarece sunt dreptunghice şi $AB = BC$, PB, este comună. De aici rezultă că $PA = PC$ şi deci triunghiul PAC este isoscel. Atunci:

$S_{APC} = \frac{AC \cdot PQ}{2} = \frac{a^2}{4b^2} \cdot \sqrt{3b^2 - a^2}$

b) $V_{PVAC} = \frac{a^2(2b^2 - a^2)}{24b^2} \cdot \sqrt{3b^2 - a^2}$.

10. Se calculează din triunghiul VAD $AD = 3$, $VD = 6$. Apoi se calculează $AB = AC = 3\sqrt{2}$; $BC = 6$.

a) $A_l = A_{VAB} + A_{VBC} + A_{VAC} = 9\sqrt{6} + 18$.

b) $V = \frac{A_{ABC} \cdot AV}{3} = \frac{9 \cdot 3\sqrt{3}}{3} = 9\sqrt{3}$.

c) $V = \frac{A_{VBC} \cdot d(A,(VBC))}{3} \Rightarrow d(A,(VBC)) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Analog $d(B,(VAC)) = d(C,(VAB)) = 3\sqrt{2}$.

12. $tg\,60^\circ = \frac{VA}{AB} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{3}{AB} \Rightarrow AB = \sqrt{3}$ cm.

$VB = \sqrt{VA^2 + AB^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \Rightarrow VC = 2\sqrt{3}$ cm.

$AC = \sqrt{VC^2 - VA^2} = \sqrt{12 - 9} = \sqrt{3}$ cm.

13. Fie $VABCD$ piramida, $VO \perp (ABCD)$, $OM \perp BC \Rightarrow$ $VM \perp BC$. Fie a latura bazei. $m(V\hat{M}O) = 45^\circ \Rightarrow VO = OM = \frac{a}{2}$. $V = \frac{A_{ABCD} \cdot VO}{3} = \frac{a^3}{6} = 1 \Rightarrow a^3 = 6 \Rightarrow a = \sqrt[3]{6}$.

14. Fie $VABCD$ piramida, $VO \perp (ABC)$, $OM \perp BC \Rightarrow$ $\Rightarrow VM \perp BC$. Fie a latura bazei. $AC = a\sqrt{2}$; $VO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

$V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$.

15. Fie $VABCD$ piramida, $VO \perp (ABC)$, $OM \perp BC \Rightarrow$ $\Rightarrow VM \perp BC$. Fie l latura bazei.

a) $A_l = A_t - A_{ABCD} = 864\text{cm}^2 - 324\text{cm}^2 = 540\text{cm}^2$.

$A_{ABCD} = 324\text{cm}^2 \Rightarrow l^2 = 324 \Rightarrow l = 18\text{cm}$.

$A_l = \frac{4l \cdot VM}{2} = 540 \Rightarrow 2 \cdot 18 \cdot VM = 540 \Rightarrow VM = 15\text{cm}$.

$OM = 9\text{cm} \Rightarrow VO = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = 12\text{cm}$.

$V = \frac{A_{ABCD} \cdot VO}{3} = \frac{324 \cdot 12}{3} = 1296\text{cm}^3$.

b) Fie $ON \perp (VBC)$. Atunci $N \in VM$.

$ON = \frac{VO \cdot OM}{VM} = \frac{36}{5} = 7{,}2\text{cm}$.

16. Fie $VABCD$ piramida, $VO \perp (ABC)$, $OM \perp BC \Rightarrow$ $\Rightarrow VM \perp BC$. Notăm cu l latura bazei.

$VM = \sqrt{VO^2 + OM^2} = \sqrt{64 + \frac{l^2}{4}}$.

$A_l = \frac{4l \cdot VM}{2} = 240 \Rightarrow l \cdot VM = 120 \Rightarrow l\sqrt{64 + \frac{l^2}{4}} = 120 \Rightarrow$

$\Rightarrow l^4 + 256l^2 - 57600 = 0 \Rightarrow l^2 = 144 \Rightarrow l = 12$cm.

17. Fie $VABCD$ piramida, $VO \perp (ABC)$, $OM \perp BC \Rightarrow$

$\Rightarrow VM \perp BC$. $VM = 10$cm ; $O\hat{V}M = 45^o \Rightarrow$

$\Rightarrow VO = OM = 5\sqrt{2} \Rightarrow AB = 2 \cdot OM = 10\sqrt{2}$cm.

18. Fie $VABCD$ piramida patrulateră regulată, $VO \perp$

$\perp (ABC)$, $OE \perp BC$. Atunci $VE \perp BC$. Notăm cu x latura bazei şi cu y apotema VE. Atunci: $A_l = 2xy = 2\sqrt{3} \Rightarrow xy = \sqrt{3}$ (1)

Din triunghiul VOE avem: $VO^2 + OE^2 = VE^2 \Rightarrow 1 + \frac{x^2}{4} = y^2$ (2)

Din (1) scoatem pe y şi înlocuind în (2) obţinem ecuaţia :

$x^4 + 4x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = -6$; $x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$.

19. Notând cu l latura bazei obţinem $A_t = l^2(1 + \sqrt{3})$, de unde rezultă: $l^2(1 + \sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow l = 1$ şi $VO = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

21. Fie $VABCD$ piramida, $VO \perp (ABC)$. Fie l latura bazei. Atunci avem: $AO = \frac{l\sqrt{2}}{2}$; $m(V\hat{A}O) = 30^o \Rightarrow VO = \frac{1}{2}VA$;

$VA^2 - VO^2 = AO^2 \Rightarrow VA^2 - \frac{1}{4}VA^2 = \frac{l^2}{2}$.

Atunci $VA = \frac{\sqrt{6}}{3}l \Rightarrow VO = \frac{\sqrt{6}}{6}l$;

22. Fie $VABCD$ piramida, $VO \perp (ABC)$. Se notează cu a latura bazei. Se calculează: $A_t = a^2(1 + \sqrt{3}) = \sqrt{6} + \sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = \sqrt{2}$.

23. Fie $VABCD$ piramida, $VO \perp (ABC)$, $OM \perp BC \Rightarrow$

$\Rightarrow VM \perp BC$. Notăm cu l, h latura bazei şi respectiv înălţimea piramidei. Atunci $\frac{l}{3} = \frac{h}{2} \Rightarrow h = \frac{2l}{3}$; $VM = \sqrt{h^2 + \frac{l^2}{4}} = \frac{5l}{6}$.

$A_l = \frac{4l \cdot VM}{2} = \frac{5l^2}{3} = 240 \Rightarrow l^2 = 144 \Rightarrow l = 12$ şi $h = 8$.

24. a) Fie $SO \perp (ABCD)$, $OS' \perp BC \Rightarrow SS' \perp BC$.
Se calculează $A_l = 260\text{cm}^2$; $A_t = 360\text{cm}^2$; $V = 400\text{cm}^3$.
b) Fie $A'B'C'D'$ intersecţia planului ce trece prin M şi este paralel cu $(ABCD)$ şi $\{S''\} = SS' \cap B'C'$. Avem $SS'' \perp$
$\perp B'C'$, $MS'' \perp B'C'$.

25. a) $VO \perp (ABCD)$, $OC \perp BC \Rightarrow VC \perp BC$.
$VO \perp (ABCD)$, $OD \perp AD \Rightarrow VD \perp AD$.
b) Prin calcul $VA = VB = 12\text{cm}$.
c) $A_t = A_{VAB} + A_{VBC} + A_{VCD} + A_{VDA} + A_{ABCD} =$
$= 36\sqrt{3} + 44\sqrt{11} + 48\text{cm}^2$. $V = \dfrac{A_{ABCD} \cdot VO}{3} = 64\sqrt{11}\,\text{cm}^3$.

27. Fie $VO \perp (ABC)$, $OM \perp AB \Rightarrow VM \perp AB$.
$m(V\hat{M}O) = 45^\circ \Rightarrow MO = VO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow VM = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

28. Fie $VO \perp (ABC)$. $AO = a$, $AD = 2a$. Triunghiul VAD este echilateral, de unde $VA = 2a \Rightarrow VO = a\sqrt{3}$.

29. Fie $VABCD$ piramida cu baza $ABCD$ romb şi l latura rombului. $A_{ABCD} = \dfrac{4l \cdot r}{2} = 2lr$; $A_{ABCD} = 2 \cdot A_{ABD} =$

$= 2 \cdot \dfrac{l^2 \sin 45^\circ}{2} = \dfrac{l^2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2lr = \dfrac{l^2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow l = 2\sqrt{2}r$. Din triunghiul

VOM avem $VM = 2 \cdot OM = 2r \Rightarrow A_t = 12\sqrt{2}r^2$, $V = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}r^3$.

30. Fie $VABCD$ piramida, $VO \perp (ABCD)$. Triunghiurile VOA, VOB, VOC, VOD sunt congruente, de unde $AO = BO = CO = DO$. Atunci rezultă că O este la intersecţia diagonalelor. $m(A\hat{O}D) = m(B\hat{O}C) = 60^\circ \Rightarrow AD = BC =$
$= 100\text{cm}$. $AB = \sqrt{DB^2 - DA^2} = 100\sqrt{3}$. Din triunghiul VAO:
$VO = AO \cdot \text{tg}\,60^\circ = 100 \cdot \sqrt{3}$.

31. a) Avem: $VA \perp (ABCD)$, $AB \perp BC$, AD, $\perp CD$ şi aplicând teorema celor trei perpendiculare rezultă că $VB \perp$
$\perp BC$ şi $VD \perp CD$. Atunci:
$VB = \sqrt{a^2 + c^2}$, $VD = \sqrt{b^2 + c^2}$, $VC = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
b) $A_t = ab + \dfrac{ac + bc}{2} + \dfrac{b\sqrt{a^2 + c^2} + a\sqrt{b^2 + c^2}}{2}$.

32. Se arată mai întâi că $A_{DMN} = A_{BCN}$. Înălțimile celor două piramide sunt egale și atunci $V_{VDMN} = V_{VBCN}$.

34. Fie $A'E \perp (ABCD)$, $E \in (AC)$. Din triunghiul $A'AE$ avem $A'E = AA' \cdot \sin 60^\circ = 5\sqrt{3}$cm și $AE = 5$cm. În triunghiul $AA'C$ dreptunghic în A' : $m(\hat{ACA'}) = 30^o \Rightarrow AC = 20$cm. Prin E ducem $FK \parallel AB$, $F \in (AD)$, $K \in (BC)$ și $B'G \perp$ $\perp (ABC)$, unde $G \in (FK)$. Din triunghiul AEF calculăm $EF = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Din triunghiul ABC, $BC = 10\sqrt{2}$.

$$EG = FK - 2 \cdot EF = 10\sqrt{2} - 2 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}.$$

36. Fie $VO \perp (ABC)$, $M \in (VC)$, $MM_1 \perp (ABC)$, $MM_2 \perp$ $\perp (VAB)$ Atunci: $V_{VABC} = V_{MABC} + V_{MVAB} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{VO \cdot A_{ABC}}{3} = \frac{MM_1 \cdot A_{ABC}}{3} + \frac{MM_2 \cdot A_{VAB}}{3} \Rightarrow$$

$\Rightarrow MM_1 + MM_2 = VO =$ constant, deoarece fețele VAB și ABC au aceeași arie.

37. În triunghiul BVD dreptunghic în V aplicăm teorema înălțimii: $VO^2 = OB \cdot OD = \frac{a}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a^2}{6} \Rightarrow VO = \frac{a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow$

$$\Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}.$$

38. $\frac{A_{AMN}}{A_{ABC}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{V_{VAMN}}{V_{VABC}} = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{V_{VANM}}{V_{VABC} - V_{VAMN}} = \frac{1}{4-1} \Rightarrow \frac{V_{VAMN}}{V_{VMBCN}} = \frac{1}{3}.$$

3.3 CORPURI ROTUNDE

1. $A_l = 2\pi RG = 60\pi$; $A_t = 2\pi R(R+G) = 78\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow RG = 30$; $R(R+G) = 39 \Rightarrow RG = 30$, $R^2 + RG = 39 \Rightarrow$

$\Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow R = 3 \Rightarrow G = 10 \Rightarrow V = \pi R^2 G = 90\pi$.

2. $A_l = 2\pi RG = 80\pi \Rightarrow RG = 40$. $V = \pi R^2 G = 200\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow R^2 G = 200$. Din cele două relații rezultă $R = 5$, $G = 8$.

$A_t = 2\pi R(R + G) = 130\pi$.

3. $A_l = V \Rightarrow 2\pi RG = \pi R^2 G \Rightarrow R = 2 \Rightarrow G = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow A_t = 2\pi R(R + G) = 32\pi$; $V = \pi R^2 G = 24\pi$.

4. $V = 2 \cdot A_l \Rightarrow \pi R^2 G = 2 \cdot 2\pi RG \Rightarrow R = 4$. Secţiunea axială în cilindru este pătrat $\Rightarrow G = 2R \Rightarrow G = 8$.
$A_t = 2\pi RG = 64\pi$.

5. $A_l = \pi RG = 2\pi$; $A_t = \pi R(R + G) = 3\pi \Rightarrow RG = 2$,
$R(R + G) = 3 \Rightarrow R^2 = 1 \Rightarrow R = 1 \Rightarrow G = 2 \Rightarrow G = 2R$ şi atunci unghiul este de 30^o.

8. Dacă O este centrul cercului de bază, atunci triunghiul OAB este echilateral şi deci $R = a$. Atunci:
$H = R\,ctg\,30^o = a\sqrt{3}$ şi $V = \dfrac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$.

9. Fie r, g, h elementele conului mic şi R, G, H elementele conului mare. Atunci :

$$r = h \cdot tg\,30^o = \frac{h}{\sqrt{3}} ; g = \frac{h}{\cos 30^o} = \frac{2h}{\sqrt{3}} ; G = \frac{2H}{\sqrt{3}} , R = \frac{H}{\sqrt{3}} ;$$

Avem : $\pi rg = \dfrac{1}{2}\pi RG \Rightarrow \dfrac{h^2}{H^2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{h}{H} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

10. Prin calcul $A_t = V = 96\pi$.

11. Notăm: $AB = 2x$ şi obţinem: $VA = VB = 2x$, $CV = x\sqrt{3}$, $R = \dfrac{2x}{\sqrt{3}}$; $OC = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$; $VO = \dfrac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}$. Din triunghiul VOC avem: $OD \cdot CV = OV \cdot OC \Rightarrow a \cdot x\sqrt{3} = \dfrac{2x\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{3\sqrt{6}a}{4} \Rightarrow R = \frac{3\sqrt{2}a}{2} , H = 3a \Rightarrow V = \frac{9\pi a^3}{2}$$

12. Fie V vârful conului, VO înălţimea şi VAB intersecţia planului cu conul, iar OM distanţa de la centrul bazei la plan. Fie $\{E\} = VM \cap AB$. În triunghiul VOM, $OV = \dfrac{OM}{\cos 60^o} = 2$ cm. Din triunghiul MOE, $OE = \dfrac{OM}{\sin 60^o} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Din triunghiul

AOE obţinem: $OA = R = \dfrac{OE}{\sin 45^o} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ cm.

13. Fie VAB, $V'AB$ cele două conuri şi VO respectiv $V'O$ înălţimile lor. Dacă R este raza bazei, atunci:

$m(A\hat{V}'O) = 60^o$; $m(A\hat{V}O) = 30^o \Rightarrow V'O = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$; $VO = R\sqrt{3}$.

$$\frac{\pi R^2 \cdot VO}{3} - \frac{\pi R^2 \cdot V'O}{3} = 1 \Rightarrow R^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}.$$

14. Fie $A'B'$ şi $A''B''$ secţiunile duse prin C şi respectiv D. Notăm $V = V_{VAB}$, $V_1 = V_{VA'B'}$, $V_2 = V_{VA''B''}$.

$$\frac{V_1}{V} = \left(\frac{VC}{VO}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{8} \cdot V = \frac{1}{8}\text{cm}^3.$$

$$\frac{V_2}{V} = \left(\frac{VD}{VO}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} \Rightarrow V_2 = \frac{1}{64}\text{cm}^3.$$

$$V_{A'B'A''B''} = V_1 - V_2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{64} = \frac{7}{64}\text{cm}^3.$$

16. a) $VO = h = \sqrt{g^2 - r^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$cm.

$A_t = \pi r(r + g) = 36\pi\text{cm}^2$; $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3} = 16\pi\text{cm}^3$.

b) $\Delta VO'B' \sim \Delta VOB \Rightarrow \dfrac{VO'}{VO} = \dfrac{O'B'}{OB} \Rightarrow \dfrac{1}{3} = \dfrac{O'B'}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow O'B' = r' = \dfrac{4}{3}$. $V_{VA'B'} = \dfrac{\pi r'^2 h'}{3} = \dfrac{16}{27}\pi\text{cm}^3$.

c) $OO' = VO - VO' = 2$cm. $V_{OA'B'} = \dfrac{\pi r'^2 \cdot OO'}{3} = \dfrac{32\pi}{27}\text{cm}^3$.

17. Fie trunchiul de con în secţiune axială $ABA'B'$, O, O', O'' centrele bazelor mare, mică şi respectiv secţiunea medie A' $'B''$. Dacă x este raza secţiunii medii, atunci $\pi x^2 = 132{,}25\pi \Rightarrow x = 11{,}5$cm. Din trapezul $OBB'O'$, $O''B''$ este linie mijlocie şi atunci $R + r = 2x = 23$cm.

$$A_{ABB'A'} = \frac{(2R + 2r) \cdot h}{2} = 552 \Rightarrow (R + r) \cdot h = 552 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 23h = 552 \Rightarrow h = 24$cm. Din triunghiul $B'B''B$ avem :

$B''B^2 = B'B^2 - B'B''^2 \Rightarrow (R-r)^2 = G^2 - h^2 \Rightarrow R - r = 7$

$R + r = 23, R - r = 7 \Rightarrow R = 15, r = 8 \Rightarrow V = 3272\pi cm^3$.

19. Fie O' şi O'' centrele celor două secţiuni şi x, y razele celor două secţiuni. Folosind formula liniei mijlocii într-un trapez avem: $2x = y + 5$; $2y = x + 11$ cu soluţiile $x = 7cm$, $y = 9cm$.

20. Notăm $a = AA' = OA$. Ducem $A'A'' \perp OA \Rightarrow$
$\Rightarrow A'A'' = 8$ cm. $A''A = a - 4$. Din triunghiul $A'A''A$ dreptunghic în A'' avem: $AA'^2 = AA''^2 + A'A''^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2 = (a-4)^2 + 8^2 \Rightarrow a = 10cm$ şi $G = 10cm$, $R = 10cm$.

21. Se procedează ca la **20.**

22. a) Se obţine $r = 5cm$ şi $V = 2600\pi cm^3$.

b) $\Delta VO'B' \sim \Delta VOB \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{VO'}{VO} = \frac{O'B'}{OB} \Rightarrow \frac{VO'}{VO'+24} = \frac{5}{15} \Rightarrow$$

$\Rightarrow VO' = 12$ cm $\Rightarrow VO = 36$ cm.

23. Fie M un punct arbitrar pe sferă şi MA, MB, MC respectiv cele trei coarde. Triunghiurile MAB, MBC şi MCA sunt congruente şi echilaterale şi atunci rezultă că $MABC$ este tetraedru regulat. Fie l latura tetraedrului, R raza sferei, O centrul sferei, M' punctul diametral opus al lui M şi $\{M''\} = MM' \cap (ABC)$. În triunghiul AMM' dreptunghic în A aplicăm teorema catetei şi obţinem:

$$AM^2 = 2R \cdot MM'' \Rightarrow l^2 = 2R \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow l = \frac{2R\sqrt{6}}{3}.$$

24. Notăm cu R, G raza şi generatoarea şi atunci raza sferei este R. În cilindru avem secţiunea axială un pătrat, de unde rezultă $2R = G$. Atunci avem:

$A_{lat.cil} = 2\pi RG = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2 = A_{sferă}$.

25. Fie VAB conul, O centrul feţei, $A'B'$, $A'B''$ secţiunile cu cele două plane paralele, O', O'' centrele celor două secţiuni. Notăm:

$V = V_{con VAB}$; $V_1 = V_{con VA''B''}$, $V_2 = V_{con VA'B'} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V} = \left(\frac{VO'}{VO}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow V_1 = \frac{V}{27}.$$

$$\frac{V_2}{V} = \left(\frac{VO'}{VO}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow V_2 = \frac{8V}{27}.$$

$$V_{tr.conABB''A''} = V - V_1 = V - \frac{V}{27} = \frac{26V}{27}.$$

$$V_{tr.conABB'A'} = V - V_2 = V - \frac{8V}{27} = \frac{19V}{27}.$$

Atunci $\frac{V_{tr.conABB''A''}}{V_{tr.conABB'A'}} = \frac{26}{19}$.

26. Notăm cu l latura bazei prismei, h înălţimea prismei, şi cu r raza cercului înscris în triunghiul echilateral de bază.

Atunci: $r = \frac{l\sqrt{3}}{6}$; $V_{cil.} = \pi r^2 h = \pi \cdot \frac{3l^2}{36} \cdot h = \frac{\pi l^2 h}{12}$.

$$V_{prismă} = A_B \cdot h = \frac{l^2\sqrt{3} \cdot h}{4} \Rightarrow \frac{V_{cil.}}{V_{prismă}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

27. Raportul este $\frac{\pi}{4}$.

28. Raportul volumelor $\frac{4}{3}$, iar raportul ariilor laterale $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

29. Planele de secţiune pot fi de o parte şi de alta a centrului sferei sau de aceeaşi parte a centrului.

1) O se află între cele două plane. Avem:

$OO' = 3$, $OO'' = 4$, $OA = OC = 5$. Atunci:

$OA = OC = 5$; $O'A = \sqrt{OA^2 - OO'^2} = 4$ şi $O''C = 3$.

Ducem $DM \perp AB$ şi avem: $BD = \sqrt{DM^2 + MB^2} = 5\sqrt{2}$.

Atunci: $A_l = \pi \cdot DB \cdot (O''C + O'A) = 35\pi\sqrt{2}$;

$$V = \frac{1}{3}\pi O'O''(O'A^2 + O''C^2 + O'A \cdot O''C) = \frac{259\pi}{3}$$

2) Planele sunt de aceeaşi parte a sferei. Avem:

$O'O'' = OO'' - OO' = 1$; $O'A = 4$; $O''C = 3$. Ducem

$CN \perp AO''$ şi atunci $AC = \sqrt{2}$ şi $A_l = 7\sqrt{2}\pi$; $V = \frac{37\pi}{3}$.

30. Se arată că $2R^2 = a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

31. Fie $IT \perp AV$. Notăm cu R, G, H raza, generatoarea şi respectiv înălţimea conului. Din asemănarea triunghiurilor VIT şi VAO rezultă: $\frac{d}{R} = \frac{H-d}{G} = \frac{G-R}{H} \Rightarrow R = \frac{d \cdot H}{G-R}$.

Atunci volumul conului va fi:

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3} = \frac{\pi R H \cdot \frac{dH}{G-R}}{3} = \frac{\pi R d \cdot H^2}{3 \cdot (G-R)} = \frac{\pi R d (G^2 - R^2)}{3 \cdot (G-R)} =$$

$$= \frac{\pi R d (G+R)}{3} = \frac{\pi R (R+G) \cdot d}{3} = \frac{d}{3} \cdot A_t \Rightarrow 3 \cdot V = d \cdot A.$$

32. Cu uşurinţă se arată că $H^2 = 4Rr$. Atunci:

$$V = \frac{\pi H}{3} \cdot (R^2 + r^2 + Rr) \geq \frac{\pi H^3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{R^2 + r^2 + Rr}{3} \geq \frac{4Rr}{4} \Leftrightarrow (R-r)^2 \geq 0, \text{ evident.}$$

4. PROBLEME RECAPITULATIVE

1. c) Se foloseşte relaţia: $A_{DAB} = A_{DAE} + A_{DEB}$.

d) $DA \perp (ABC) \Rightarrow DA \perp CE$; $CE \perp AB \Rightarrow CE \perp (DAB)$. Atunci $CE \perp DB$ şi cum $EF \perp DB$, rezultă $DB \perp (CEF)$.

2. a) Fie $AA' \perp BD$. Atunci rezultă $MA' \perp BD$.

b) $\frac{MA \cdot A_{BCD}}{3} = V_{MBCD} = V_{CMBD} = \frac{A_{MBD} \cdot d(C,(MBD))}{3}$.

c) K se găseşte la intersecţia perpendicularei în O pe planul $(ABCD)$ cu planul mediator al lui MA.

d) $DA \perp (MAB) \Rightarrow DA \perp MB$. Cum $AE \perp MB$ rezultă $MB \perp (DAE) \Rightarrow V_{MAED} = \frac{A_{DAE} \cdot ME}{3}$.

3. c) În triunghiul ACM, NO este linie mijlocie, de unde rezultă $NO \parallel MA$. Cum $NO \subset (BDN)$, rezultă $MA \parallel (BDN)$.

d) Deoarece $ABCD$ este romb, rezultă $BD \perp AC$.

$MA \perp (ABCD)$, $NO \parallel AM \Rightarrow NO \perp (ABCD) \Rightarrow NO \perp BD$.

Cum $BD \perp AC$ şi $BD \perp ON$, rezultă $BD \perp (MAC)$.

5. e) Prin calcul se arată că triunghiul $C'QM$ este dreptunghic în Q.

f) $AC \perp (BB'D'D) \Rightarrow AC \perp BD'$ (1).

În planul $(ABB'A')$ ducem $BB'' \parallel AB'$.

Se calculează cu uşurinţă: $BD' = a\sqrt{3}$, $BB'' = a\sqrt{2}$, $B''D' = a\sqrt{5}$ şi atunci $BD'^2 + BB'^2 = B''D'^2$, de unde rezultă că triunghiul $BB''D'$ este dreptunghic în B. Deci $BB'' \perp BD'$ şi deoarece $BB'' \parallel AB'$, rezultă $BD' \perp AB'$.

Cum $AC \perp BD'$, rezultă că $BD' \perp (AB'C)$.

6. a) Notăm $A\hat{D}M = x \Rightarrow N\hat{A}B = x$, $O\hat{D}C = 90^o - x$, $O\hat{N}C = 90^o + x \Rightarrow D\hat{O}N = 90^o \Rightarrow AN \perp DM$.

e) Evident $A'C' \perp B'D'$. $DD' \perp (A'B'C'D') \Rightarrow$ $\Rightarrow DD' \perp A'C'$. Atunci $A'C' \perp (DBB')$.

7. e) $AD \perp (CDD'C') \Rightarrow AD \perp MC$.

$DE \perp (MAC) \Rightarrow DE \perp MC$. Atunci $MC \perp (ADE)$, de unde rezultă $MC \perp AE$.

8. b) Piramidele $ABA'D$ şi $C'A'DB$ au muchiile laterale congruente şi atunci proiecţiile punctelor A şi respectiv C' pe planul $(A'BD)$ cad în E, centrul cercului circumscris triunghiului $A'BD$ şi deci coincid. Atunci punctele A, E, C' sunt coliniare şi deci $AC' \perp (A'BD)$.

c) $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow AA' \perp BD$. Însă $BD \perp AC$. Atunci $BD \perp (AA'C) \Rightarrow BD \perp OP$.

e) Din asemănarea triunghiurilor OPC şi $AA'C$ rezultă $OP = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

9. d) Triunghiul MNP este echilateral, de unde rezultă $MN^2 = NP^2 = PM^2 \Rightarrow a^2 + 4b^2 + c^2 = 4a^2 + b^2 + c^2 =$
$= a^2 + b^2 + 4c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 = c^2 \Rightarrow a = b = c$.

e) $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ şi $p = \frac{4a + 4b + 4c}{2} = 2a + 2b + 2c$.

Atunci $2\sqrt{3}\,d \geq p \Leftrightarrow 12d^2 \geq p^2 \Leftrightarrow 12(a^2 + b^2 + c^2) \geq$
$\geq 4(a + b + c)^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

10. a) Fie (VBN) planul bisector al feţelor (VAB) şi (VBC). Atunci BN este bisectoarea unghiului ABC, şi cum triunghiul este echilateral, rezultă că D este mijlocul lui AC.

Fie $VO \perp (ABC)$. Atunci O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC şi deci $O \in BD$. În triunghiul dreptunghic BVD, aplicând teorema înălţimii obţinem: $VO^2 = OB \cdot ON \Rightarrow$
$\Rightarrow VO^2 = \frac{a^2}{6} \Rightarrow VO = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

b) Se calculează $VA = VB = VC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ şi prin calcul rezultă că triunghiul VAC este dreptunghic în A.

d) Se arată că $MN \perp CP$ şi $MN \perp VO$.

11. a) Fie D mijlocul lui AC. Atunci $BD \perp AC$ şi $VD \perp$
$\perp AC \Rightarrow AC \perp (VBD) \Rightarrow AC \perp VB$.

b) $V_{VABC} = \frac{A_{VBD} \cdot AC}{3}$.

c) Punctul căutat este D şi $BD = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

12. a) Fie VO înălțimea piramidei și $OM \perp BC \Rightarrow VM \perp BC$. Notăm cu a latura bazei, și avem:

$$S = A_l + A_{ABCD} \Rightarrow S = \frac{4a \cdot VM}{2} + a^2 = 2a \cdot VM + a^2.$$

Triunghiul VBC este echilateral și atunci $VM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Înlocuim în relația de mai sus și obținem:

$\sqrt{6} + \sqrt{2} = a^2 \cdot (\sqrt{3} + 1) \Rightarrow a = \sqrt[4]{2}$.

c) Fie K mijlocul înălțimii și $KL \perp (VBC)$. Atunci $L \in (VBC)$. Distanța KL se calculează folosind asemănarea triunghiurilor VKL și VOM.

13. b) Notăm $B\hat{A}N = A\hat{D}M = x$. Atunci $B\hat{N}A = 90^o - x$, $A\hat{N}C = 90^o + x$, $C\hat{D}M = 90^o - x$, de unde rezultă că $A\hat{N}C + C\hat{D}M = 180^o$, și apoi $D\hat{E}N = 90^o$. Avem:

$ED^2 + EN^2 = DN^2 = CD^2 + CN^2$.

c) $VA \perp (ABCD)$, $AE \perp DM \Rightarrow VE \perp DM$.

e) Se folosește relația:

$$V_{VABCD} = V_{OABV} + V_{OADV} + V_{OCDV} + V_{OBCV}.$$

14. c) Fie E centrul cercului circumscris triunghiului BCD. Punctele din spațiu egal depărtate de punctele B, C, D se găsesc pe perpendiculara d în E pe planul (BCD). Punctele din spațiu egal depărtate de A, B, C, D se găsesc la intersecția dintre d și planul mediator al segmentului $[AB]$.

e) Se folosește relația:

$$V_{ABCD} = V_{IABC} + V_{IACD} + V_{IABD} + V_{IBCD}.$$

16. c) Fie O și O' centrele celor două fețe.

Se notează $x = VO'$ și prin asemănare de triunghiuri se calculează $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

d) Fie $OE \perp BC$ și $M \in VO, N \in VE$ astfel încât $MO = MN$. Se notează $MO = MN = x$. Avem $OE = NE = a$.

Se folosește asemănarea triunghiurilor VMN și VOE.

17. b) Fie $E \in VO$ și $M \in VB$ astfel încât $EO = EM$. Se folosește asemănarea triunghiurilor VEM și VOB.

c) Fie $F \in VO$ și N pe cercul de bază astfel încât $VF = FN$. Se folosește teorema lui Pitagora în triunghiul drep-

tunghic FON.

18. c) Fie V vârful conului din care provine trunchiul de con. Triunghiul VA_1B_1 este echilateral deoarece este isoscel şi unghiul de la bază are 60^o.

d) Fie $O_1M \perp VB_1$. Pentru determinarea lui O_1M se foloseşte asemănarea triunghiurilor dreptunghice VO_1M şi VO_1B_1.

20. a) Fie V vârful conului din care provine trunchiul de con. Ducem $B'B'' \perp AB$. Ae calculează $BB'' = 10$ cm, $O'B' = 5$ cm. Notăm $x = VO'$. Folosind asemănarea triunghiurilor VOB şi $VO'B'$, rezultă: $\frac{VO'}{VO} = \frac{O'B'}{OB} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x}{x+24} = \frac{5}{15} \Rightarrow x = 12$. Atunci $VO = VO' + O'O = 36$.

c) Fie $MN \perp VB$. Atunci avem: $MN^2 + NB^2 = MO^2 + OB^2 \Rightarrow$ $NB = BO = 15$ cm. Atunci $VB = 39$.

$\Delta VMN \sim VOB \Rightarrow \frac{MN}{OB} = \frac{VN}{VO} \Rightarrow \frac{MN}{15} = \frac{24}{36} \Rightarrow MN = 10$.

d) Punctul I se găseşte pe $[OO']$. Notăm $x = OI$. Avem: $AI^2 = A'I^2 \Rightarrow AO^2 + OI^2 = A'O^2 + O'I^2 \Rightarrow 15^2 + x^2 =$

$= 5^2 + (24 - x)^2 \Rightarrow x = \frac{47}{6}$.

5. TESTE GRILĂ DE EVALUARE

TESTUL 1 c; b; a; c; c; d;

TESTUL 2 e; b; b; c; d; d;

TESTUL 3 d; e; d; c; c; c;

TESTUL 4 d; b; b; b; e; b;

TESTUL 5 c; a; e; e; e; d;

TESTUL 6 c; e; c; b; b; d;

TESTUL 7 d; e; d; c; d; c;

TESTUL 8 e; c; b; a; d; c;

TESTUL 9 e; e; b; e; c; d;

TESTUL 10 b; c; d; d; e; e.

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Ţiţeica, Probleme de geometrie, Editura tehnică, Bucureşti 1981.

2. Liviu Nicolescu, Vladimir Boskoff, Probleme practice de geometrie, Editura tehnică, Bucureşti 1990.

3. Gh. Schneider, V. Schneider, Teste de matematică pentru admiterea în liceu, Editura Apollo, Craiova 1991.

4. I.C. Drăghicescu, V. Masgras, Probleme de geometrie, Editura tehnică, Bucureşti 1987.

5. Gh. Schneider, Culegere de probleme de geometrie pentru clasele V - VIII, Editura Hyperion, Craiova 2000.

6. F. Cârjan, Să învăţăm geometrie, Editura Cardinal, 1994.

7. Manuale clasa a-VI-a

8. Manuale clasa a-VII-a

9. Manuale clasa a-VIII-a

10. Colecţia Gazeta Matematică seria B, 1966 - 1993.

CUPRINS

	Enunţuri	Rezolvări
GEOMETRIE PLANĂ		
1. Dreapta	5	130
2. Unghiul	10	131
3. Perpendicularitate	13	132
4. Triunghiul	15	132
5. Paralelism	19	133
6. Triunghiul dreptunghic	23	135
7. Patrulatere	27	138
8. Asemănarea triunghiurilor	35	142
9. Relaţii metrice în triunghiul dreptunghic	44	148
10. Cercul	49	153
11. Arii	65	160
12. Inegalităţi	72	163
13. Probleme recapitulative	76	166
GEOMETRIE ÎN SPATIU		
1. Relaţii între puncte, drepte şi plane. Paralelism. Perpendicularitate	83	170
2. Proiecţii ortogonale pe un plan Plane perpendiculare. Unghi diedru	90	176
3. Calcul de arii şi volume	100	184
3.1 Prisma dreaptă	100	184
3.2 Piramida, trunchiul de piramidă	104	187
3.3 Corpuri rotunde	109	192
4. Probleme recapitulative	114	198
TESTE GRILĂ DE EVALUARE		
TESTELE 1- 10	120	202